

Автоколебательная система под внешним периодическим воздействием: Синхронизация

Рассмотрим некоторую нелинейную диссипативную систему, в которой реализуется режим периодических автоколебаний. Образом установившегося режима в фазовом пространстве будет предельный цикл – замкнутая фазовая траектория, к которой приближаются все другие траектории. Далее, введем дополнительно внешнее периодическое воздействие на систему, такое, что его временной период близок к периоду автономных колебаний. При этом обнаруживается замечательное явление: в определенном интервале частоты внешней силы колебания системы синхронизируются с внешним воздействием по частоте (или, что то же самое, по периоду), причем упомянутый частотный интервал (полоса синхронизации) тем шире, чем больше интенсивность воздействия. Этот эффект – *синхронизация внешней силой* наблюдается в системах самой разной природы – в радиотехнических и электронных устройствах, в лазерах, в механических системах, в колебательных химических реакциях, в биологических объектах. Кроме синхронизации на частоте воздействия может реализоваться также *синхронизация на гармониках и субгармониках*, когда частоты воздействия и отклика кратны друг другу или, в самом общем случае, находятся в некотором рациональном отношении.

Принципиальное значение для понимания эффекта синхронизации имеет то обстоятельство, что периодические автоколебания в отсутствие внешнего воздействия на систему характеризуются *фазой, различные значения которой равно допустимы*.

Если на систему, совершающую автоколебания, подействовать толчком, то она вновь придет в режим стационарных автоколебаний с той же амплитудой, но, вообще говоря, с другой фазой. Если же внешнее воздействие периодическое и осуществляется постоянно, то даже при малой его амплитуде возникающий сдвиг фазы может постепенно накапливаться, так что за достаточно большое время фаза окажется сдвинутой на большую величину.

Представим себе, что в одном интервале значений фазы собственных колебаний системы относительно внешнего воздействия эта фаза дрейфует в одну сторону, а в другом – в другую. Ясно, что в итоге система придет в точку, отвечающую смене на-

правления дрейфа относительной фазы, и там останется. Это и будет режим синхронизации.

Если мы имеем две слабо связанные автоколебательные системы, то можно сказать, что каждая из них осуществляет внешнее воздействие на другую. Результатом часто оказывается возникновение такого установившегося режима, в котором колебания в обеих системах происходят синхронно, с одной и той же частотой, с одним и тем же периодом. Это эффект *взаимной синхронизации связанных систем*. Впервые он был описан в XVII веке Христианом Гюйгенсом применительно к механическим автоколебательным системам – часам, причем связь между системами обеспечивается их закреплением на общем основании.

Существует легенда (правда, несколько сомнительной достоверности), что этот эффект использовали недобросовестные часовщики. Представьте себе, как должно было в XVII или XVIII веке впечатлять покупателя множество выставленных на продажу часов, которые все показывают в точности одно и то же время!

Если совокупность двух или более связанных автоколебательных элементов рассматривается как единая система, то их взаимную синхронизацию естественно трактовать как *внутреннюю синхронизацию* присущих этой системе колебательных мод («*захват мод*»).

Синхронизация имеет разнообразные и важные применения в технике. Если, например, мы имеем мощный электронный генератор, то частотой колебаний в нем можно эффективно управлять в определенных пределах, подавая относительно слабый внешний сигнал желаемой частоты. Обеспечить стабильность частоты маломощного вспомогательного генератора технически гораздо проще, но, благодаря эффекту синхронизации, в этом случае стабильной становится и частота мощного генератора. Представление о синхронизации позволяет объяснить или интерпретировать подчас очень интригующие и нетривиальные явления, такие как подстройка биологических ритмов живых организмов под внешнее воздействие (например, суточный цикл), синхронизация свечения скопления светлячков, синхронизация хлопков при аплодисментах в театре и т.д.

В современной нелинейной динамике сформировался гораздо более широкий взгляд на синхронизацию, нежели в классической теории колебаний. Действительно, как мы теперь знаем, автоколебания могут быть представлены не только периодическими, но и более сложными режимами, в том числе квазипериодическими и хаотиче-

скими. При каждой возможной комбинации типов режима в воздействующей и ведомой системах может возникнуть такая ситуация, что динамика второй системы воспроизведет определенные характеристики динамики первой. В этом случае мы вправе говорить о синхронизации в некотором обобщенном смысле. При однонаправленной связи подсистем это можно интерпретировать как синхронизацию системы внешним сигналом – регулярным или хаотическим. При наличии взаимного воздействия двух систем друг на друга может возникать множество разнообразных режимов взаимной синхронизации.

К настоящему времени в литературе накоплен обширный материал, относящийся к указанному кругу вопросов. Введено представление о таких феноменах как обобщенная взаимная синхронизация хаотических систем (Афраймович, Веричев, Рабинович, 1986, Pecora and Carroll, 1990), хаотическая синхронизация при однонаправленной связи (Анищенко, Рабинович и др., 1986, 1996), фазовая синхронизация хаотических систем, синхронизации невзаимодействующих систем в присутствии воздействующего на них идентичного шумового сигнала (Пиковский, 1984, Grebogy et al., 1990). В системах с квазипериодическим внешним воздействием выявлена возможность возникновения странного нехаотического аттрактора (Grebogi et al., 1984), что может рассматриваться как своего рода сценарий разрушения режима синхронизации.

Различные аспекты обобщенной синхронизации привлекают внимание, в частности, с точки зрения возможных приложений. Например, системы с однонаправленной связью, подсистемы которых генерируют синхронный хаос, рассматриваются как основа коммуникационных систем, использующих хаотические сигналы. Большой интерес вызывает возможность осуществления синхронизации внешним воздействием различных биологических процессов (сердечный ритм, ритмы мозга, дыхательный ритм), что может привести к нетривиальным возможностям использования, в том числе в медицине.

В данной лекции мы ограничимся обсуждением классической синхронизации периодических автоколебаний внешним воздействием, которая, по сути дела, может рассматриваться как фундамент для дальнейших обобщений. Для ознакомления с другими упомянутыми выше проявлениями феномена синхронизации, способами их описания, возможными приложениями, мы отсылаем читателя к обширной специализированной литературе.

**Осциллятор Ван-дер-Поля под периодическим внешним воздействием.
Исходная модель и укороченное уравнение для медленной амплитуды**

Как указывалось в предыдущих лекциях, простейшая модель автоколебательной системы с двумерным фазовым пространством описывается уравнением Ван-дер-Поля. Добавим в это уравнение внешнее периодическое воздействие, дописав дополнительный член, зависящий от времени по гармоническому закону:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = b \sin \omega t. \quad (18.1)$$

Здесь параметр b определяет безразмерную амплитуду, а ω – частоту воздействия, отнесенную к частоте малых собственных колебаний осциллятора. Если система находится недалеко от порога возникновения автоколебаний (λ невелико), амплитуда колебаний и амплитуда воздействия малы, а частота воздействия близка к частоте малых колебаний (ω близко к 1), то можно воспользоваться каким-либо вариантом метода медленно меняющихся амплитуд, например, методом Ван-дер-Поля (лекция 9).

Будем искать решение уравнения (18.1) в виде квазигармонического колебания с медленно меняющейся амплитудой $A(t)$

$$x(t) = \operatorname{Re}\left(A(t)e^{i\omega t}\right) = \frac{1}{2}A(t)e^{i\omega t} + \frac{1}{2}A^*(t)e^{-i\omega t}, \quad (18.2)$$

где звездочка обозначает комплексное сопряжение. Как обычно, на комплексную амплитуду A удобно наложить дополнительное условие

$$\dot{A}e^{i\omega t} + \dot{A}^*e^{-i\omega t} = 0. \quad (18.3)$$

Вычислим величины \dot{x} и \ddot{x} (см. формулы (9.76), (9.77)) и подставим эти выражения в уравнение (18.2), учитывая, что $b \sin \omega t = b(-ie^{i\omega t} + ie^{-i\omega t})/2$. Далее умножим обе части на $e^{-i\omega t}$ и проведем усреднение за период, считая комплексную амплитуду A медленно меняющейся функцией времени. В результате приходим к укороченному уравнению

$$\dot{A} + i \frac{(\omega^2 - 1)}{2\omega} A = \frac{\lambda A}{2} - \frac{|A|^2 A}{8} - \frac{b}{2\omega}. \quad (18.4)$$

Мы получили уравнение (18.4) в результате определенных преобразований, имея в виду приближенное описание динамики исходной системы – уравнения Ван-дер-Поля с внешним воздействием. Однако можно посмотреть на него иначе, как на самостоятельный объект исследования. В конце концов, уравнение (18.4) непосредственно задает определенную автоколебательную систему с периодическим

внешним воздействием. Желая провести исследование синхронизации в какой-либо подходящей модельной задаче, мы вправе обратиться именно к этому осциллятору.

Далее удобно ввести перенормированные величины с тем, чтобы уменьшить количество параметров в уравнении. Заметим, что нас интересует случай, когда автономная система совершает автоколебания, т.е. $\lambda > 0$. Полагая

$$\tau = \frac{\lambda t}{2}, \quad z = \frac{A}{\sqrt{4\lambda}}, \quad \Delta = \frac{(\omega^2 - 1)}{\lambda\omega}, \quad \varepsilon = \frac{b}{2\omega\lambda^{3/2}}, \quad (18.5)$$

перепишем уравнение (18.4) в новых переменных

$$\dot{z} + i\Delta z = z - |z|^2 z - \varepsilon, \quad (18.6)$$

где теперь точка означает производную по τ , параметр ε характеризует амплитуду внешнего воздействия, а Δ – отстройку частоты воздействия от собственной частоты автоколебаний. Часто бывает удобно представить комплексную амплитуду в виде $z = Re^{i\varphi}$. Тогда из уравнения (18.6) получаем

$$\dot{R}e^{i\varphi} + iR\dot{\varphi}e^{i\varphi} + i\Delta Re^{i\varphi} = Re^{i\varphi} - R^3 e^{i\varphi} - \varepsilon. \quad (18.7)$$

Умножим уравнение на $e^{-i\varphi}$ и отделим действительную и мнимую части:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R - R^3 - \varepsilon \cos \varphi, \\ \dot{\varphi} &= -\Delta + (\varepsilon/R) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (18.8)$$

Полученная система дифференциальных уравнений имеет второй порядок и допускает дальнейшее аналитическое исследование. Мы отложим это исследование на время, а пока рассмотрим возможность дальнейшего упрощения задачи.

Приближение малых амплитуд воздействия и уравнение для фазы

Предположим, что амплитуда воздействия невелика, т.е. параметр ε мал.¹ В нулевом порядке по ε из первого уравнения (18.8) найдем амплитуду установившихся колебаний $R = 1$ и подставим ее во второе уравнение. (Поскольку во втором уравнении со-

¹ Параметр ε определен через отношение величин b и $\lambda^{3/2}$, которые для применимости метода медленно меняющихся амплитуд *обе должны быть малыми*. Однако *соотношение между ними* мы вправе задать любым, в частности, определить его так, чтобы параметр ε был малым. Это обеспечено при $b \ll \lambda^{3/2}$. Условие применимости рассматриваемого приближения будет, следовательно, *двойное неравенство* $b \ll \lambda^{3/2} \ll 1$.

ответствующий член содержит множитель ε , при этой подстановке мы вправе использовать нулевой порядок аппроксимации для R .) В результате приходим к замкнутому уравнению для единственной переменной – фазы колебаний системы по отношению к внешнему воздействию:

$$\dot{\varphi} = -\Delta + \varepsilon \sin \varphi \quad (18.9)$$

В зарубежной литературе его называют *уравнением Адлера*.

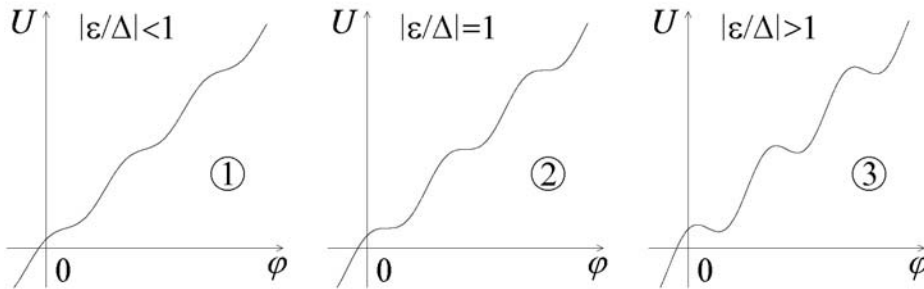


Рис. 18.1. График потенциальной функции при различных значениях $|\varepsilon/\Delta|$.

Введем функцию $U(\varphi) = \varphi\Delta + \varepsilon \cos \varphi = \Delta \cdot [\varphi + (\varepsilon/\Delta) \cos \varphi]$ и перепишем уравнение (18.9) в виде $\dot{\varphi} = -\partial U/\partial \varphi$. С точки зрения формы потенциальной функции, существенной является ее зависимость от отношения ε/Δ . При $|\varepsilon/\Delta| < 1$ потенциал монотонно зависит от φ . При $|\varepsilon/\Delta| = 1$ зависимость от фазы еще монотонная, но приобретает точки перегиба, где касательная горизонтальна, а график локально имеет вид кубической параболы (критическая ситуация). Наконец, при $|\varepsilon/\Delta| > 1$ потенциальная функция становится неоднозначной, имеет максимумы и минимумы (рис. 18.1). На рис. 18.2 показаны области, где реализуется первая и третья ситуации на плоскости параметров (Δ, ε) . Критическая ситуация имеет место на разграничивающих линиях $\Delta = \pm \varepsilon$.

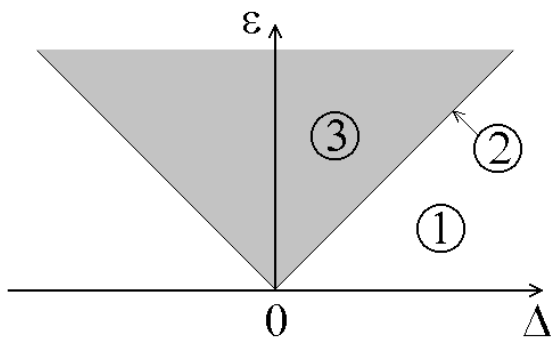


Рис.18.2. Область синхронизации или язык Арнольда (серый цвет) на плоскости расстройка частот Δ – амплитуда воздействия ε

Динамику фазы можно наглядно представить, как скольжение частицы по потенциальному профилю в вязкой жидкости (рис. 18.3). При $|\varepsilon/\Delta| < 1$ будет иметь место однонаправленное движение, скорость которого осциллирует, причем период осцилляций стремится к бесконечности по мере приближения к критической ситуации. При $|\varepsilon/\Delta| > 1$ «частица» должна будет остановиться в одном из минимумов потенциальной функции, что соответствует режиму синхронизации: фаза колебаний системы относительно фазы воздействия перестает меняться во времени. Точка остановки определяется формально из условия минимума потенциала, $U'(\varphi) = 0$, $U''(\varphi) > 0$, т.е. $\sin \varphi_0 = \Delta/\varepsilon$, $\cos \varphi_0 < 0$.

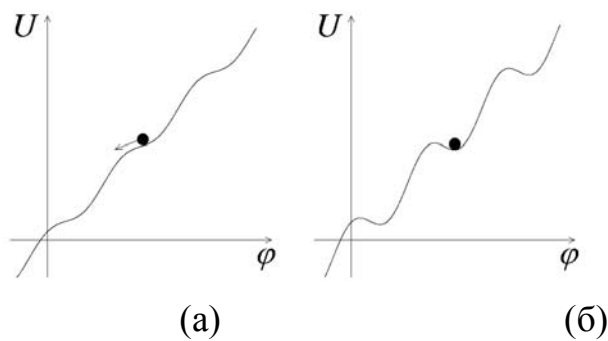


Рис. 18.3. Динамика фазы по аналогии со скольжением частицы по потенциальному профилю в вязкой жидкости: (а) при $|\varepsilon/\Delta| < 1$, когда синхронизации нет (частица соскальзывает вниз), и (б) при $|\varepsilon/\Delta| > 1$, когда фаза колебаний системы становится фиксированной по отношению к фазе воздействия: (частица останавливается в потенциальном минимуме).

Если мы фиксируем амплитуду воздействия ε и изменяем его частоту (т.е. параметр Δ), то синхронизация достигается в определенном интервале значений расстройки $|\Delta| < \varepsilon$. Это полоса синхронизации. Ее ширина в рассматриваемом приближении увеличивается прямо пропорционально амплитуде воздействия. Область (зону) в форме языка на плоскости параметров (Δ, ε) , отвечающую режиму синхронизации, называют также *языком Арнольда*.

Разберемся, что происходит при изменении параметра расстройки, когда мы пересекаем границу языка Арнольда. Для этого проанализируем уравнение (18.9) графически – изобразим график функции $\sin \varphi$ и проведем горизонтальную линию на уровне Δ/ε (рис. 18.4). Пусть сначала $\Delta/\varepsilon < 1$. В области фаз, где синусоида поднимается выше этой прямой, правая часть уравнения положительна, т.е. $\dot{\varphi} > 0$, и, следовательно, фазовая переменная φ нарастает во времени. В области, где она проходит ниже проведенной прямой, правая часть отрицательна, $\dot{\varphi} < 0$, и фазовая переменная φ убывает. Точки, где прямая пересекается с синусоидой, отвечают состояниям равновесия, одно из них устойчивое, а другое неустойчивое. При увеличении Δ/ε горизонтальная прямая распо-

лагается все выше, и обе точки равновесия приближаются друг к другу. В момент $\Delta/\varepsilon=1$ они сливаются, и затем, при $\Delta/\varepsilon>1$, исчезают.

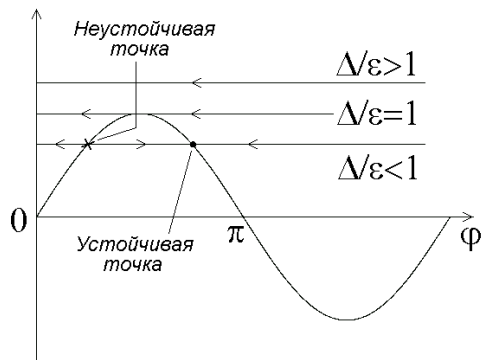


Рис. 18.4. К пояснению природы бифуркации на границе области синхронизации. Показан график функции $\sin\varphi$ и горизонтальные линии на уровне Δ/ε , когда эта величина меньше, равна, и больше единицы. Стрелки показывают направление изменения фазовой переменной во времени.

Итак, внутри языка Арнольда (при $|\Delta|<\varepsilon$) установившийся режим системы – это синхронизованное состояние, которому отвечает устойчивая неподвижная точка уравнения (18.9). В этом режиме амплитуда колебаний постоянна, а частота равна частоте внешнего воздействия (фаза φ не меняется во времени).

Квазипериодическая динамика: режим биений

Изучим характер режима, реализующегося за пределами области синхронизации (при $|\Delta|>\varepsilon$). Это нетрудно, поскольку дифференциальное уравнение (18.9) удастся решить аналитически. Будем считать для определенности, что $\Delta>0$. Применим метод разделения переменных: перепишем уравнение как $\frac{d\varphi}{-\Delta + \varepsilon \sin \varphi} = d\tau$, и проведем интегрирование:

$$\int \frac{d\varphi}{-\Delta + \varepsilon \sin \varphi} = \int d\tau. \quad (18.10)$$

Учитывая, что $\Delta>\varepsilon$, вычисляем фигурирующий здесь табличный интеграл и получаем

$$\frac{2}{\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(-\Delta - \varepsilon) \operatorname{tg}(\varphi/2 - \pi/4)}{\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}} = \tau, \quad (18.11)$$

Мы положили константу интегрирования равной нулю; тем самым фиксируются определенные начальные условия, а именно, $\varphi|_{\tau=0} = \frac{\pi}{2}$. Любое другое решение будет отличаться только временным сдвигом. Выражая из (18.11) $\operatorname{tg}(\varphi/2 - \pi/4)$, находим

$$\operatorname{tg}(\varphi/2 - \pi/4) = -\sqrt{\frac{\Delta - \varepsilon}{\Delta + \varepsilon}} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}\tau\right) \quad (18.12)$$

или

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{\Delta - \varepsilon}{\Delta + \varepsilon}} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}\tau\right)\right]. \quad (18.13)$$

Если формально строить зависимость фазы от времени, следуя формуле (18.13), то она будет иметь скачки. Их можно избежать путем добавки к фазе величины $(\pm 2\pi)$, что соответствует переходу на другую ветвь многозначной функции, каковой является арктангенс.

Даваемая выражением (18.13) зависимость фазы от времени имеет вид осцилляций периода $T = 2\pi/\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}$, наложенных на линейный дрейф фазы со средней скоростью

$$\langle \dot{\varphi} \rangle = \begin{cases} -\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}, & \Delta > 0 \\ \sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}, & \Delta < 0 \end{cases} \quad (18.14)$$

(рис. 18.5). В непосредственной близости от границы языка можно наблюдать участки почти постоянной фазы, разделенные относительно короткими участками «проскальзывания» фазы, где она меняется на величину близкую к 2π . Трансформация зависимости фазы при приближении к границе зоны синхронизации состоит в увеличении участков постоянства фазы.

Задача 18.1. Получите выражение для средней скорости изменения фазы вне языка синхронизации.

Решение. Усредним обе части уравнения (18.9) за период осцилляций $T = 2\pi/\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}$ и подставим в правую часть выражение для $\sin \varphi$ из (18.12). Имеем:

$$\langle \dot{\varphi} \rangle = -\Delta + \langle \sin \varphi \rangle = -\Delta + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\Delta \cos\left(\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}\tau\right) + \varepsilon}{\Delta + \varepsilon \cos\left(\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}\tau\right)} d\tau.$$

Вычисление интеграла приводит к соотношению (18.14).

Вспомним теперь, что мы искали приближенное решение уравнения (18.9). Исходная динамическая переменная x выражается через комплексную амплитуду $z = Re^{i\varphi} \approx e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, т.е. в действительности нам нужна не сама по себе величина φ , а ее синус и косинус. Используя известные выражения тригонометрических функций через тангенс половинного угла и подставляя его из (18.12), получаем:

$$\cos \varphi = -\sin(\varphi - \pi/2) = -\frac{2 \operatorname{tg}(\varphi/2 - \pi/4)}{1 + \operatorname{tg}^2(\varphi/2 - \pi/4)} = \frac{\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2} \sin(\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2} \tau)}{\Delta + \varepsilon \cos(\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2} \tau)}, \quad (18.15)$$

$$\sin \varphi = \cos(\varphi - \pi/2) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\varphi/2 - \pi/4)}{1 + \operatorname{tg}^2(\varphi/2 - \pi/4)} = \frac{\Delta \cos(\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2} \tau) + \varepsilon}{\Delta + \varepsilon \cos(\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2} \tau)}, \quad (18.16)$$

так что

$$\begin{aligned} x = \operatorname{Re} A e^{i\omega_0 t} &= 2\sqrt{\lambda} \operatorname{Re} z e^{2i\omega_0 \tau / \lambda} = 2\sqrt{\lambda} \left[\cos \varphi \cos\left(\frac{2\omega_0 \tau}{\lambda}\right) - \sin \varphi \sin\left(\frac{2\omega_0 \tau}{\lambda}\right) \right] = \\ &= 2\sqrt{\lambda} \frac{\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2} \sin(\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2} \tau) \cos\left(\frac{2\omega_0 \tau}{\lambda}\right) - (\Delta \cos(\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2} \tau) + \varepsilon) \sin\left(\frac{2\omega_0 \tau}{\lambda}\right)}{\Delta + \varepsilon \cos(\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2} \tau)} \end{aligned} \quad (18.17)$$

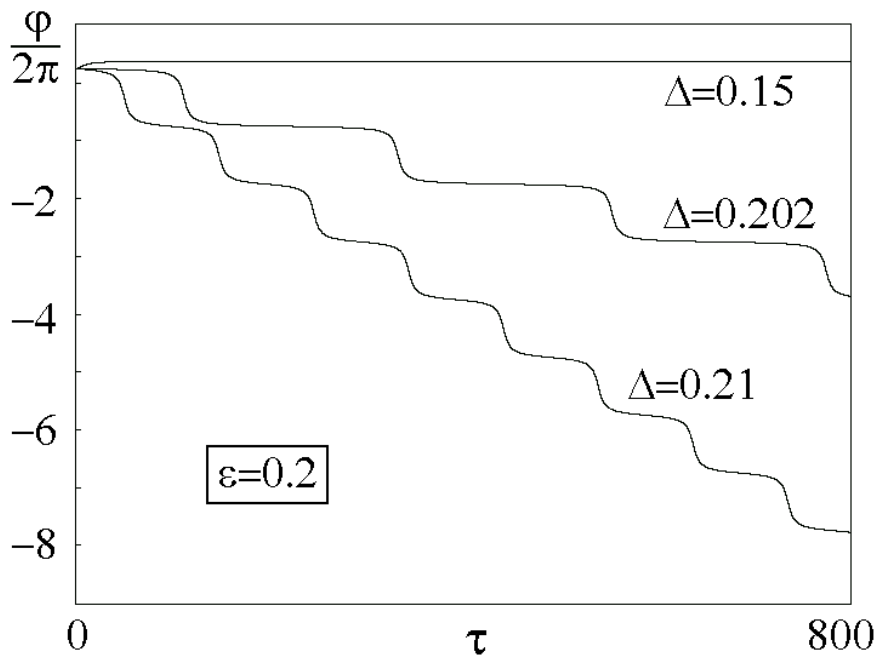


Рис. 18.5. Зависимость фазы от времени при $\varepsilon=0.2$ внутри языка синхронизации ($\Delta=0.15$) и вне языка в непосредственной близости от границы ($\Delta=0.202$) и в несколько большей удаленности от нее ($\Delta=0.21$)

Процесс, описываемый выражением (18.17), содержит две частоты, отвечающие быстрым и медленным колебаниям, соответственно,

$$\Omega_0 = 2\omega/\lambda \text{ и } \Omega_1 = \sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}. \quad (18.18)$$

Они могут находиться в произвольном, в том числе иррациональном соотношении. Тогда мы имеем дело не с периодическим, а с квазипериодическим колебательным про-

цессом (рис. 18.6). Такой колебательный режим, реализующийся вне языка синхронизации, называют *режимом биений*.

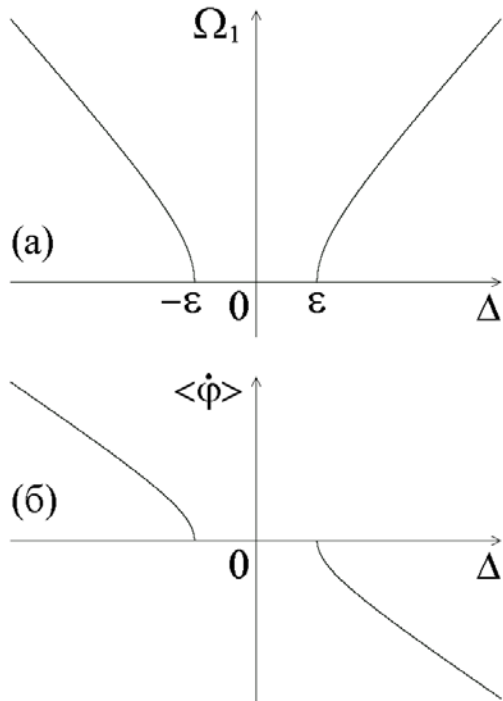


Рис. 18.6 Зависимость частоты биений (а) и средней скорости изменения фазы от параметра расстройки частот Δ

Бифуркации, сопровождающие возникновение синхронизации, на фазовой плоскости укороченного уравнения

Наше рассмотрение в предыдущих двух разделах относилось к случаю малых амплитуд и основывалось на уравнении первого порядка для фазы. Теперь мы намерены вернуться к исходному укороченному уравнению (18.6), анализ которого вскрывает более широкую картину явлений, сопровождающих эффект синхронизации. На рис. 18.7 показан вид плоскости параметров (Δ, ε) , получаемый при анализе уравнения (18.6).

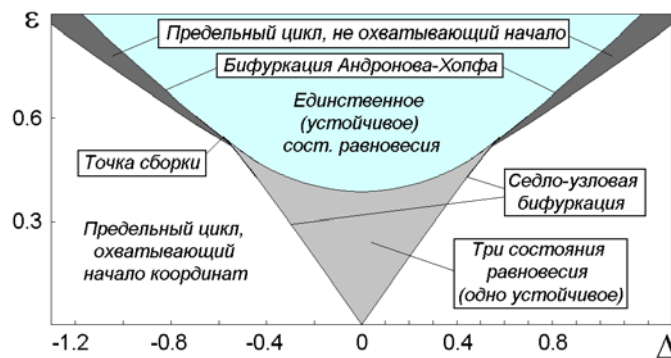


Рис. 18.7. Бифуркационные линии и области различных режимов на плоскости параметров расстройка частоты – амплитуда внешнего воздействия для укороченного уравнения (18.6)

Начнем с того, что установим связь с уже изученным случаем: проследим, что происходит на фазовой плоскости укороченного уравнения ($x=\text{Re } z$, $y=\text{Im } z$), когда мы переходим границу области синхронизации при малой амплитуде воздействия.

Если внешнее воздействие выключено, $\varepsilon=0$, и расстройка Δ велика, то на фазовой плоскости укороченного уравнения имеется замкнутая траектория – устойчивый предельный цикл, представленный окружностью единичного радиуса, к которому асимптотически приближаются другие траектории. Имеется также неустойчивый фокус в начале координат (рис. 18.8а). Качественно таким же образом устроена при большой расстройке фазовая плоскость и в присутствии внешнего воздействия (рис. 18.8б). По мере уменьшения параметра Δ неустойчивая точка вблизи начала координат становится узлом (рис. 18.8в). Что касается движения на предельном цикле, то при приближении на плоскости параметров к границе области синхронизации, в одном определенном месте предельного цикла перемещение изображающей точки по нему становится очень медленным, и она вообще останавливается, когда мы приходим на границу зоны. При входе в область синхронизации на фазовой плоскости по-прежнему присутствует замкнутая инвариантная кривая (кривая, составленная из фазовых траекторий) – бывший предельный цикл. Но теперь она содержит два куска, по которым движение происходит в противоположных направлениях. На этой кривой имеется две неподвижные точки, одна устойчивая (узел), а другая неустойчивая (седло) (рис. 18.8г).

Бифуркация, которую мы здесь имеем, носит название седло-узловой или касательной бифуркации. (Второй термин предпочтителен, когда рассмотрение ведется в одномерном приближении: происхождение его можно пояснить с привлечением рис. 18.4: бифуркация как раз соответствует моменту касания прямой и синусоиды.) В нижней части языка синхронизации, которая показана серым цветом на рис. 18.7, мы имеем на фазовой плоскости в общей сложности три неподвижные точки — две неустойчивые и одну устойчивую. При приближении к верхней границе этой области две неустойчивые точки: седло, расположенное на инвариантной замкнутой кривой и неустойчивая точка, расположенная внутри этой кривой, начинают сближаться. Затем они сливаются и исчезают, после чего на фазовой плоскости остается устойчивая единственная точка (узел), отвечающая за установившийся режим синхронизованных колебаний.

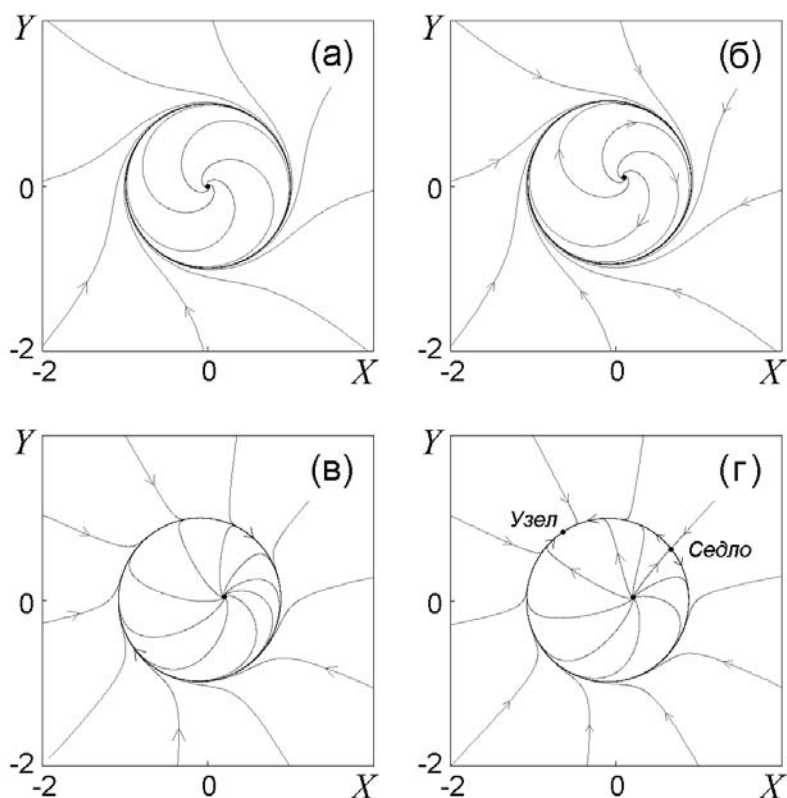


Рис. 18.8. Фазовая плоскость уравнения (18.6): (а) в отсутствие внешнего воздействия, (б), (в), (г) – при малом воздействии, соответственно, вдали границы языка синхронизации, вблизи границы, и внутри языка.

Будем теперь снова увеличивать параметр расстройки Δ . В некоторый момент мы обнаружим, что устойчивый узел превращается в фокус, соответствующие собственные числа линеаризованного уравнения становятся комплексными. Затем действительная часть пары комплексно сопряженных собственных чисел становится положительной, и это соответствует моменту бифуркации Андронова — Хопфа: фокус становится неустойчивым, а в его окрестности рождается притягивающий предельный цикл. Пока этот предельный цикл «маленький» и не охватывает начало координат, основная частота в спектре колебаний по-прежнему совпадает с частотой воздействия, так что говорить о разрушении синхронизации пока еще рано. Но это уже другая разновидность синхронного режима, когда на фоне колебаний с частотой воздействия появляются колебания на другой частоте, выбираемой самой нашей автоколебательной системой. При дальнейшем увеличении расстройки наступает ситуация, когда предельный цикл охватывает начало координат, теперь основной частотой в спектре служит частота, порождаемая самой системой, и синхронизация отсутствует. Таким образом, граница области синхронизации в этом случае — это линия на плоскости параметров, определяемая услови-

ем того, что предельный цикл проходит через начало координат. (Найти эту линию удастся только посредством численного интегрирования уравнений с подбором параметра Δ для каждого заданного ε с тем, чтобы выполнялось указанное условие.)

На рис. 18.9 воспроизведен вид плоскости параметров (Δ, ε) для уравнения (18.6) и фазовые портреты в нескольких характерных точках. Они иллюстрируют два качественно разных механизма разрушения синхронизации — через седло-узловую бифуркацию при малых амплитудах воздействия и через рождение режима модулированных колебаний при больших амплитудах.

В узкой промежуточной области в районе $\varepsilon \cong 0.5$ наблюдается сложная картина бифуркаций, выявляемая достаточно тонким двухпараметрическим анализом. Этой области мы в данном курсе касаться не будем, читатель может ознакомиться с соответствующими результатами, обратившись к специальной литературе (см., например, книгу Холмса и Гуккенхаймера).

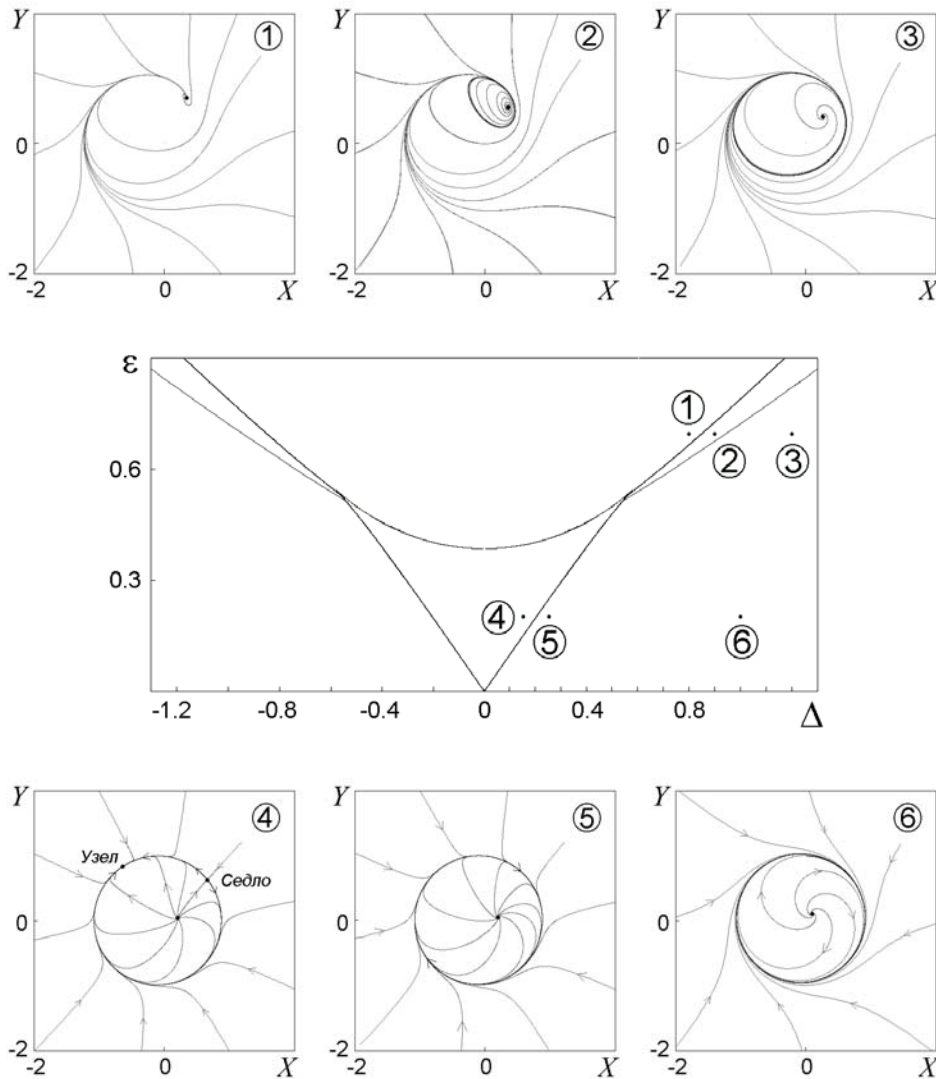


Рис. 18.9. Вид плоскости параметров (Δ, ε) для уравнения (18.6) и фазовые портреты в нескольких характерных точках, иллюстрирующие два качественно разных механизма разрушения синхронизации: при малых и больших амплитудах воздействия.

Синхронизация осциллятора Ван-дер-Поля: численный эксперимент

В какой мере результаты, полученные в рамках метода медленно меняющихся амплитуд применимы для описания синхронизации в исходном уравнении Ван-дер-Поля (18.1)? Оказывается, что в достаточно широкой области параметров наблюдается разумное качественное соответствие. На рис. 18.10 приводятся результаты численного решения уравнения (18.1) для $\lambda=0.5$ при малой амплитуде воздействия $b=0.2$, а на рис. 18.11 — при достаточно большой амплитуде $b=0.7$. Приводятся также спектры генерируемого системой сигнала: такие спектры в реальном эксперименте можно наблюдать на экране специального прибора — спектроанализатора.

Обратите внимание, как изменяется в этих двух случаях характер наблюдаемой временной зависимости в режиме биений, когда мы выходим из области синхронизации при увеличении частоты воздействия.

В первом случае, при малой амплитуде воздействия, модуляция сигнала первоначально возникает с очень большим характерным временным периодом, а затем этот период уменьшается. В спектре наблюдается набор большого числа близко расположенных составляющих, которые постепенно «раздвигаются» при увеличении расстройки частот.

Во втором случае, при достаточно большой амплитуде воздействия, режим биений возникает как модуляция сигнала с определенным конечным периодом. (Колебания с этим периодом наблюдаются даже внутри области синхронизации, вблизи от ее края, хотя здесь они являются затухающими.) В спектре новая составляющая на частоте, отличной от частоты воздействующего сигнала, появляется на конечном удалении от нее, имеет сначала очень малую амплитуду, далее она увеличивается, и в какой-то момент становится больше, чем амплитуда на частоте внешнего воздействия.

Описанные явления хорошо укладываются в картину, выявленную методом медленно меняющихся амплитуд. Тем не менее, возможны режимы, когда метод медленно меняющихся амплитуд заведомо не работает (при больших λ и b), а динамика уравнения Ван-дер-Поля с внешним периодическим воздействием может быть весьма сложной и, в частности, хаотической.

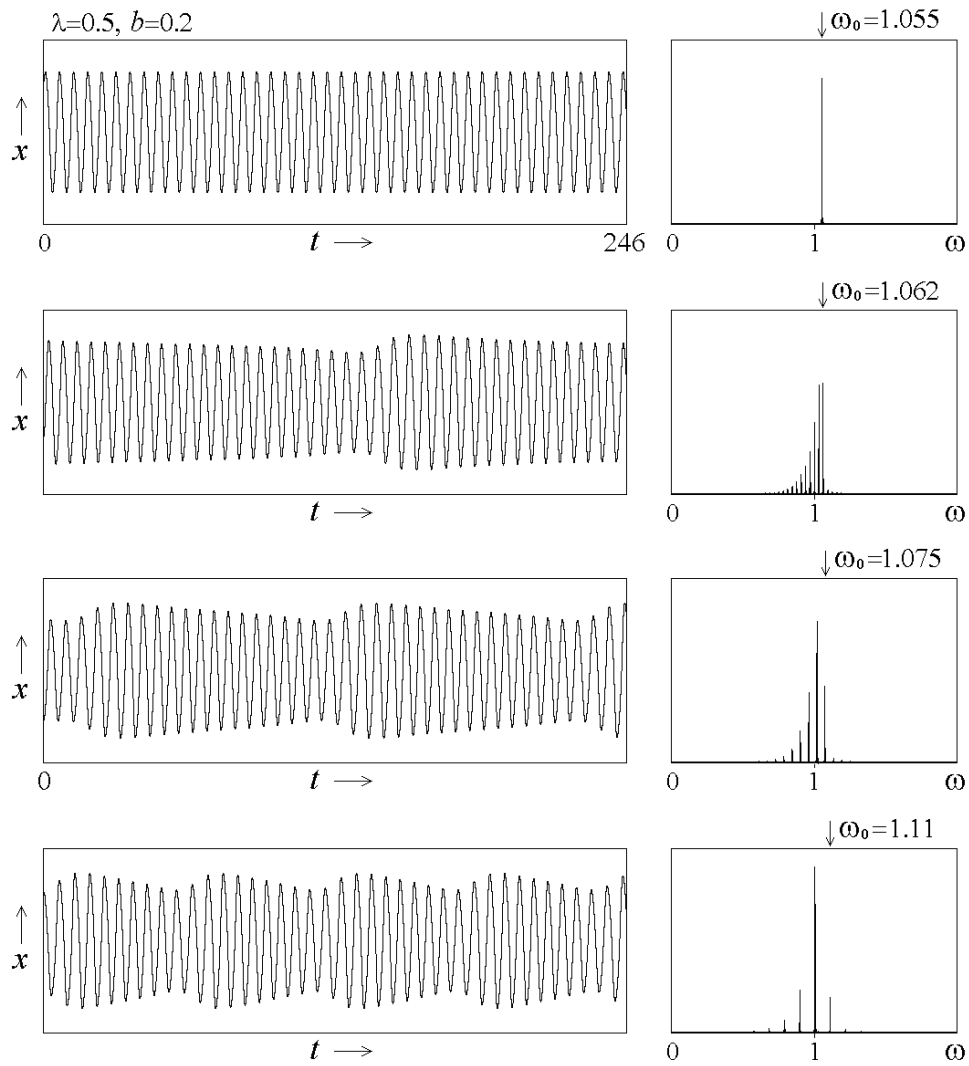


Рис. 18.10. Слева – полученные численно зависимости динамической переменной от времени для системы Ван-дер-Поля (уравнение (18.1)) при малой амплитуде внешнего воздействия, справа – соответствующие спектры. Частота воздействия показана стрелочкой. Самая верхняя картинка отвечает режиму синхронизации, остальные – режимам биений.

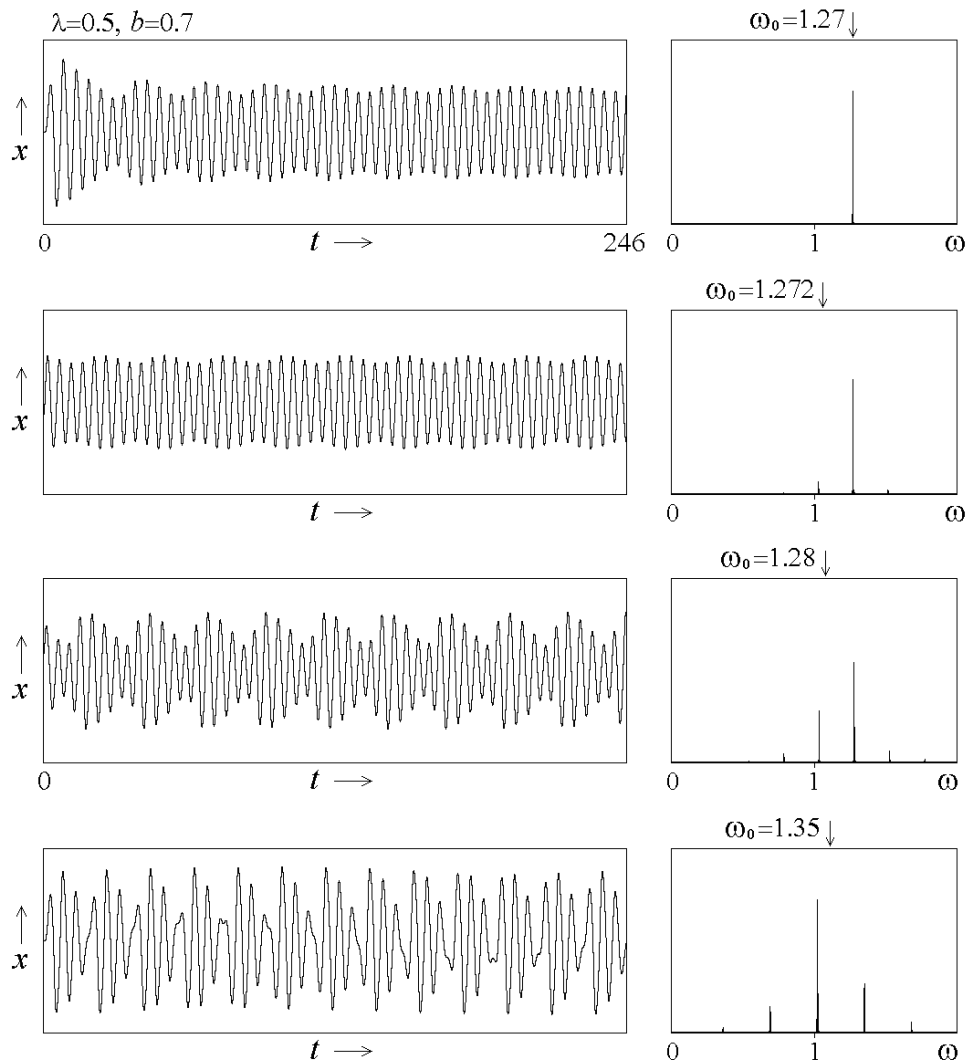


Рис. 18.11. Слева – полученные численно зависимости динамической переменной от времени для системы Ван-дер-Поля (уравнение (18.1)) при большой амплитуде внешнего воздействия, справа – соответствующие спектры. Частота воздействия показана стрелочкой. Самая верхняя картинка отвечает режиму синхронизации. Показана временная зависимость, отвечающая процессу установления режима синхронизации, чтобы продемонстрировать характерные для данной ситуации затухающие осцилляции огибающей сигнала.

Задача 18.2. Постройте фазовые портреты укороченного уравнения Ван-дер-Поля под внешним гармоническим воздействием в окрестности точки сборки.

Решение. Искомые портреты показаны на рис. 18.12. Отметим, что из точки O выходит не только линия бифуркации Андронова — Хопфа, но и линия нелокальной бифуркации OS , отвечающая влипанию предельного цикла в сепаратрису седла: переход от фазового портрета 3 к 4.

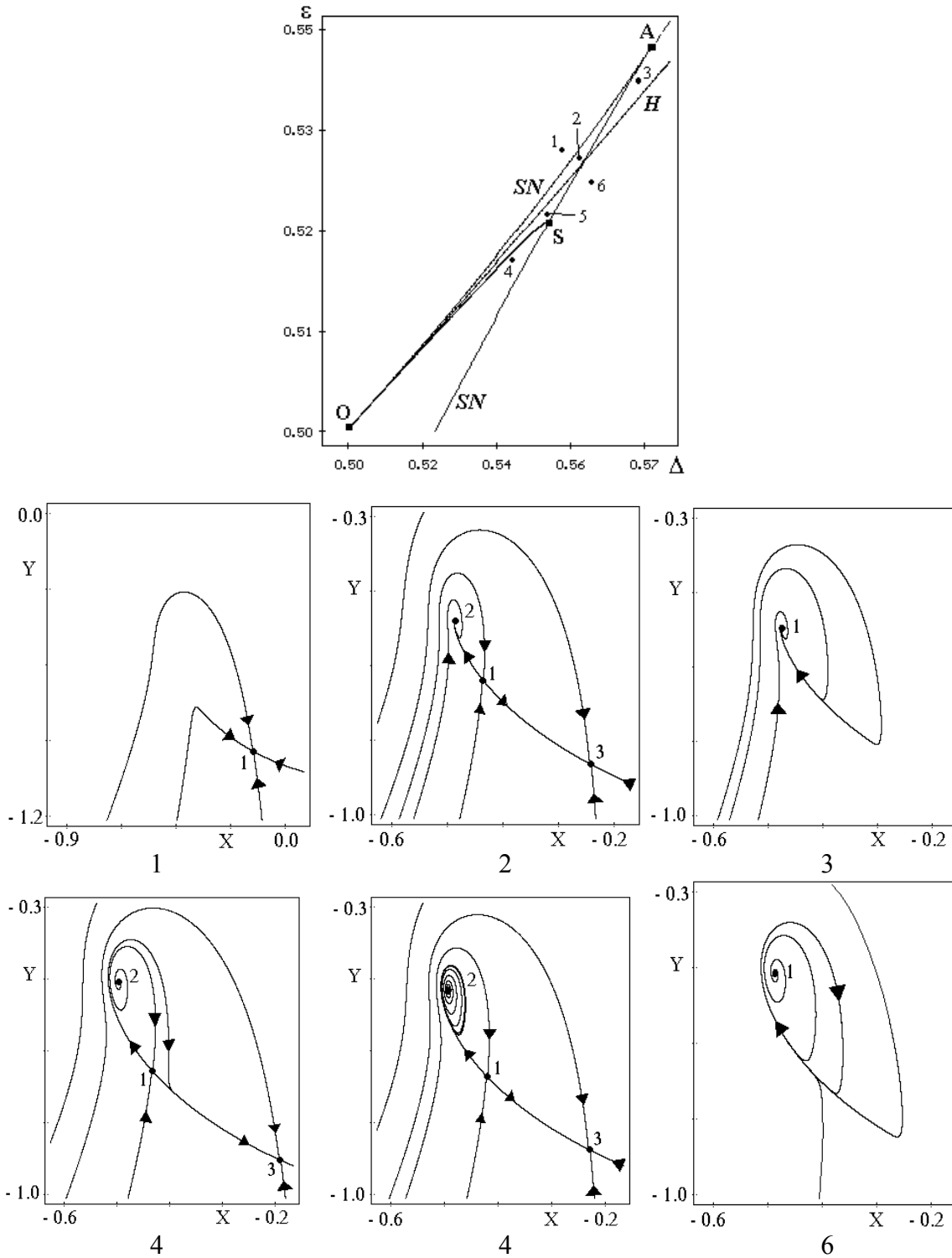


Рис. 18.12. Увеличенный фрагмент плоскости параметров Δ, ε . Видна сложная структура бифуркационных линий вблизи точки сборки. Вставки 1-6 – характерные фазовые портреты.

Задача 18.3. Получите уравнение, аналогичное уравнению Адлера (18.9) для системы Ван-дер-Поля с двухчастотным воздействием

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = a \sin \omega t + b \sin(\Omega t + \theta). \quad (18.19)$$

Решение. Прежде всего получим укороченное уравнение для медленно меняющейся амплитуды колебаний. Используем метод Ван-дер-Поля. Будем искать решение в виде квазигармонического колебания (18.2) с медленно меняющейся амплитудой $A(t)$, которая удовлетворяет соотношению (18.3). Подставляя в уравнение (18.19) и усредняя, приходим к укороченному уравнению (ср. 18.4)

$$\dot{A} + i \frac{(\omega^2 - 1)}{2\omega} A = \frac{\lambda A}{2} - \frac{|A|^2 A}{8} - \frac{a}{2\omega} - \frac{b}{2\omega} e^{i[(\Omega - \omega)t + \theta]}. \quad (18.20)$$

Выполним замену переменных (ср. 18.5)

$$\tau = \frac{\lambda t}{2}, \quad z = \frac{A}{\sqrt{4\lambda}}, \quad \Delta = \frac{(\omega^2 - 1)}{\lambda\omega}, \quad \varepsilon = \frac{a}{2\omega\lambda^{3/2}}, \quad \mu = b/(2\omega\lambda^{3/2}), \quad \delta = \frac{2(\Omega - \omega)}{\lambda}.$$

Здесь Δ имеет смысл безразмерной отстройки частоты первого сигнала от собственной частоты автономной системы, δ — расстройки частот воздействующих сигналов, ε и μ — их безразмерных амплитуд. В результате получим

$$\dot{z} + i\Delta z = z - |z|^2 z - \varepsilon - \mu e^{i(\delta\tau + \theta)}. \quad (18.21)$$

Для действительных амплитуды R и фазы φ из (18.21) получаем

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R - R^3 - \varepsilon \cos \varphi - \mu \cos(\delta\tau + \theta - \varphi), \\ \dot{\varphi} &= -\Delta + \frac{\varepsilon}{R} \sin \varphi - \frac{\mu}{R} \sin(\delta\tau + \theta - \varphi). \end{aligned} \quad (18.22)$$

В случае малых амплитуд воздействия ε и μ движения происходят вблизи невозмущенного предельного цикла $R \approx 1$. Тогда уравнение для фазы принимает вид

$$\dot{\varphi} = -\Delta + \varepsilon \sin \varphi - \mu \sin(\delta\tau + \theta - \varphi). \quad (18.22)$$

Это и есть искомое уравнение.

Задача 18.4. Получите укороченное уравнение для системы Ван-дер-Поля — Дуффинга с гармоническим внешним воздействием

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 = b \sin \omega t. \quad (18.23)$$

Ответ:

$$\dot{z} + i\Delta z = z - (1 + i\kappa)|z|^2 z - \varepsilon, \quad (18.24)$$

где $\kappa = 3\beta/\omega$, остальные величины определяются в соответствии с (18.5). Если выделить из (18.24) уравнения для вещественных амплитуды и фазы, получим

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R - R^3 - \varepsilon \cos \varphi, \\ \dot{\varphi} &= -\Delta + \kappa R^2 + (\varepsilon/R) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (18.25)$$

Единственное отличие от уравнений (18.8) состоит в наличии слагаемого κR^2 в уравнении для фазы. Таким образом, видно, что член вида βx^3 в исходном уравнении (18.23) играет роль фазовой нелинейности и приводит к *неизохронности* колебаний.

Задача 18.5. Найдите границы языка синхронизации в неавтономной системе Ван-дер-Поля — Дуффинга (18.23).

Решение. Используем сначала приближение, отвечающее движению вблизи предельного цикла $R \approx 1$. Тогда из второго уравнения (18.25) получаем

$$\dot{\varphi} = -\Delta + \kappa + \varepsilon \sin \varphi. \quad (18.26)$$

Значит, для границы языка будем иметь

$$\Delta = \kappa \pm \varepsilon. \quad (18.27)$$

Таким образом, по сравнению с описанным в лекции случаем (см. рис. 18.2), язык синхронизации смещается на величину κ вдоль оси Δ .

Найдем теперь границы языка строго. Для этого запишем уравнения (18.25) в стационарном случае ($\dot{R} = \dot{\varphi} = 0$):

$$\begin{aligned} R - R^3 &= \varepsilon \cos \varphi, \\ \Delta R - \kappa R^3 &= \varepsilon \sin \varphi. \end{aligned} \quad (18.28)$$

Возводя оба уравнения (18.28) в квадрат и складывая, получим

$$\varepsilon^2 = (1 + \kappa^2) \xi^3 - 2(\Delta \kappa + 1) \xi^2 + (1 + \Delta^2) \xi, \quad (18.29)$$

где $\xi = R^2$. Границы языка находим, дифференцируя уравнение (18.29) по ξ :

$$3(1 + \kappa^2) \xi^2 - 4(\Delta \kappa + 1) \xi + 1 + \Delta^2 = 0, \quad (18.30)$$

откуда

$$\xi_{1,2} = \frac{2(1 + \Delta \kappa) \pm \sqrt{\Delta^2 (\kappa^2 - 3) + 8\Delta \kappa + 1 - 3\kappa^2}}{3(1 + \kappa^2)}. \quad (18.31)$$

Если подставить это соотношение в (18.29), получим границу языка на плоскости параметров Δ, ε . Уравнение (18.29) имеет третий порядок по ξ , поэтому оно дает линии складок (границы языка) и точки сборки. Сборки легко находятся из (18.30): они отвечают слиянию линий складок, следовательно,

$$\Delta^2 + \frac{8\kappa}{\kappa^2 - 3} \Delta + \frac{1 - 3\kappa^2}{\kappa^2 - 3} = 0. \quad (18.31)$$

Разрешая это уравнение относительно Δ , находим

$$\Delta = \frac{-4\kappa \pm \sqrt{3}(\kappa^2 + 1)}{\kappa^2 - 3}. \quad (18.32)$$

Задача 18.6. Найдите линии бифуркации Андронова — Хопфа в укороченном уравнении Ван-дер-Поля — Дуффинга (18.24).

Ответ. $\varepsilon^2 = (1 + 4\Delta^2 - 4\Delta\kappa + \kappa^2)/8$, они заканчиваются в общих точках с границей языка (точки Богдана — Такенса), для которых

$$\Delta_{1,2} = \frac{2\kappa \pm \sqrt{\kappa^2 + 1}}{2}.$$

Литература

Книги серии «Современная теория колебаний и волн»

1. Трубецков Д.И., Рожнёв А.Г. Линейные колебания и волны. М.: Физматлит, 2001. 416 с.
2. Кузнецов А.П., Рожнёв А.Г., Трубецков Д.И. Линейные колебания и волны. Сборник задач. М.: Физматлит, 2001. 128 с.
3. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны. М.: Наука, Физматлит, 2000. 272 с.
4. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.

Учебники по теории колебаний

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981, 586 с.
2. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М., Наука, 1987, 384 с.
3. Горелик Г.С. Колебания и волны. Физматгиз, 1959.
4. Горяченко В.Д. Элементы теории колебаний. Красноярск: Изд-во Красноярск. ун-та. 1995. 430 с.
5. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988, 368 с.
6. Конторович М.И. Нелинейные колебания в радиотехнике. М., Советское радио, 1973. 320с.
7. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980.
8. Мандельштам Л.И. Лекции по колебаниям. М.: Изд. АН СССР, 1955.
9. Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н. Основы теории колебаний. М., Наука, 1978.
10. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984, 432 с.

11. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. М., Наука, 1964. 437с.
12. Трубецков Д.И. Колебания и волны для гуманитариев. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1997, 393 с.

Обзоры, монографии, специальная литература

1. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976. 496с.
2. Блэкьер О. Анализ нелинейных систем. М.: Мир, 1969. 400с.
3. Блехман И.И. Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981. 351с.
4. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
5. Гапонов–Грехов А.В., Рабинович М.И. Л.И. Мандельштам и современная теория колебаний и волн. УФН. 1979. Т.128, №3. С. 579–624.
6. Гапонов–Грехов А.В., Рабинович М.И. Нелинейная физика. Стохастичность и структуры. В сб. Физика XX века: Развитие и перспективы. М.: Наука, 1984. С. 219–280.
7. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984, 271 с.
8. Заславский Г.М., Чириков Б.В. Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний. УФН. 1971. Т.105, №1. С. 3–40.
9. Калиткин Н.Н. Численные методы. М., Наука, 1978. 512с.
10. Каплан А.Е., Кравцов Ю.А., Рылов В.А. Параметрические генераторы и делители частоты. М.: Сов. радио. 1966. 334 с.
11. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, Физматлит, 1997, 496 с.
12. Лихтенберг А., М. Либерман. Регулярная и хаотическая динамика. М.: Мир, 1984.
13. Люиселл У. Связанные и параметрические колебания в электронике. М.: ИЛ, 1963. 352 с.
14. Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984, 535 с.
15. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972, 472 с.

16. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания, М.: Наука, 1987, 424 с.
17. Нелинейные волны. Под ред. Гапонова-Грехова А.В. М.: Наука, 1979, 360 с.
18. Нелинейные волны. Стохастичность и турбулентность. Под ред. Рабиновича М.И. М.: Наука, 1980, 220 с.
19. Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие. Под ред. Гапонова-Грехова А.В.. М.: Наука, 1981, 244 с.
20. Нелинейные волны. Самоорганизация. Под ред. Гапонова-Грехова А.В. и Рабиновича М.И. М.: Наука, 1983, 264 с.
21. Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. Под ред. Гапонова-Грехова А.В. и Рабиновича М.И. М.: Наука, 1987.
22. Нелинейные волны. Динамика и эволюция. Под ред. Гапонова-Грехова А.В. и Рабиновича М.И. М.: Наука, 1989, 400 с.
23. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М., Наука, 1986. 288с.