

## Параметрические колебания нелинейных систем

### **Параметрический резонанс и параметрическая неустойчивость в линейной системе**

Специфическим видом внешнего воздействия на колебательную систему является периодическое изменение параметров системы во времени. Такое воздействие называется *параметрическим*. Начнем с краткого напоминания об основных особенностях параметрических колебаний в линейных системах<sup>1</sup>.

Рассмотрим простую модельную систему: колебательный контур с переменной емкостью (рис. 16.1). Изменение емкости со временем можно обеспечить, например, механически изменяя расстояние между пластинами конденсатора. В таком случае мгновенные значения заряда  $q$  и напряжения  $u$  на емкости будут связаны соотношением  $q(t) = C(t)u(t)$ . Это позволяет записать дифференциальное уравнение, описывающее колебания в контуре

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC(t)}q = 0. \quad (16.1)$$

Уравнение (16.1) имеет вид уравнения гармонического осциллятора, собственная частота которого зависит от времени.

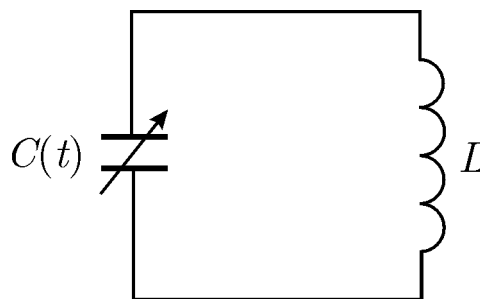


Рис. 16.1. Колебательный контур с переменной емкостью

Пусть емкость конденсатора изменяется следующим образом. В моменты времени, когда заряд на конденсаторе максимален, пластины резко раздвигаются. При

---

<sup>1</sup> Параметрические колебания в линейных системах и явление параметрического резонанса достаточно подробно обсуждаются в книге «Линейные колебания и волны», входящей в состав настоящей серии.

этом емкость уменьшается от некоторого значения  $C_2$  до значения  $C_1 < C_2$ . Поскольку заряд на конденсаторе при этом не изменяется, напряжение скачком возрастет от значения  $V_2$  до значения  $V_1 = C_2 V_2 / C_1$ . В моменты времени, когда заряд равен нулю, пластины так же резко сдвигаются; емкость при этом увеличивается, а напряжение остается равным нулю (рис. 16.2). В таком процессе постоянно совершается работа, которая идет на увеличение энергии колебаний. За один период приращение энергии составит (необходимо учесть, что в течение периода пластины раздвигаются дважды)

$$\Delta W = 2(W_1 - W_2) = C_1 V_1^2 - C_2 V_2^2 = C_2 V_2^2 \left( \frac{C_2}{C_1} - 1 \right). \quad (16.2)$$

Если ввести обозначения  $\Delta C = C_2 - C_1$ ,  $C = (C_1 + C_2)/2$  и считать, что  $\Delta C \ll C$ , соотношение (16.2) можно переписать в виде

$$\Delta W \approx 2W \frac{\Delta C}{C}. \quad (16.3)$$

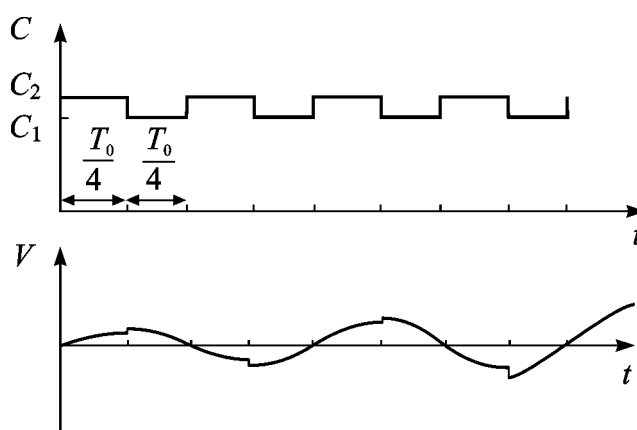


Рис. 16.2. Зависимость от времени емкости и напряжения в колебательном контуре с механически перестраиваемым конденсатором

Из приведенных выше рассуждений следует, что для эффективного поступления энергии в систему период колебаний  $T_0$  и период изменения параметра  $T$  должны быть связаны соотношением

$$T \approx \frac{T_0}{2}, \quad (16.4)$$

которое представляет собой условие *параметрического резонанса*. Отметим отличие от резонансного условия при вынужденных колебаниях линейного осциллятора,  $T \approx T_0$ .

Можно, однако, раздвигать пластины не каждый раз, когда заряд на конденсаторе максимален, а через раз; энергия все равно будет поступать в систему, хотя и в меньшем количестве. Более того, очевидно, что это можно делать в общем случае только в каждый  $n$ -ый благоприятный момент. Таким образом, имеется, вообще говоря, бесконечное число параметрических резонансов, условия которых имеют вид

$$T \approx \frac{nT_0}{2}, \quad (16.4)$$

Число  $n = 1, 2, \dots$  будем называть *порядком резонанса*, а резонанс при  $n = 1$  — основным.

При выполнении условий резонанса колебания в линейной системе, как можно видеть на рис. 16.2, неограниченно нарастают. Это явление называется *параметрической неустойчивостью*.

Основной моделью в теории параметрических колебаний в линейных системах служит уравнение *Матьё*

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + f \cos \omega t)x = 0, \quad (16.5)$$

которое представляет собой уравнение линейного осциллятора с гармоническим параметрическим возбуждением. Это уравнение детально исследовано математиками; более того, его решения составляют особый класс специальных функций — функции Матьё. Для наших дальнейших целей важно отметить следующие его свойства. На плоскости параметров амплитуда — частота воздействия существуют *зоны неустойчивости*, которые имеют вид характерных клювов, расположенных в окрестности резонансных частот

$$\omega \approx \frac{2\omega_0}{n}. \quad (16.6)$$

Перейдем к новой независимой переменной  $\tau = \omega t/2$ . Тогда уравнение (16.5) можно переписать в виде

$$x'' + (a + 2q \cos 2\tau)x = 0, \quad (16.7)$$

где  $a = 4\omega_0^2/\omega^2$ ,  $q = 2\omega_0^2 f/\omega^2$ , штрихи обозначают дифференцирование по  $\tau$ . Зоны неустойчивости на плоскости параметров  $(a, q)$  изображены на рис. 16.3. В новых переменных резонансное условие (16.6) принимает вид  $a \approx n^2$ .

Отметим следующие отличия от резонанса при вынужденных колебаниях. Во-первых, малая расстройка (в пределах зоны неустойчивости) не может стабилизировать неустойчивость, тогда как при вынужденных колебаниях амплитуда нарастает до бесконечности только в случае точного резонанса  $\omega = \omega_0$ . Кроме того нарастание амплитуды параметрических колебаний происходит по *экспоненциальному* закону, а не по линейному.

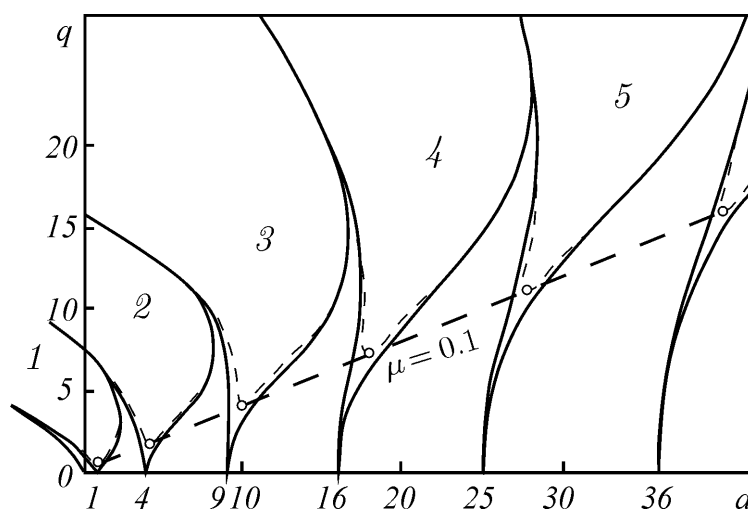


Рис. 16.3. Границы зон неустойчивости на плоскости параметров  $(a, q)$  для уравнения Матью. Цифры 1-5 соответствуют номерам резонансов.

Добавление *линейного затухания* также не стабилизирует неустойчивость, а лишь сужает границы зон (на рис. 16.3 они показаны штриховой линией). Действительно, если рассмотреть уравнение параметрического осциллятора с затуханием

$$y'' + 2\gamma y' + (b + 2q \cos 2\tau)x = 0, \quad (16.8)$$

нетрудно показать, что заменой  $y = x \exp[-\gamma\tau]$  оно может быть приведено к виду (16.7), где  $a = b - \gamma^2$ . Чтобы решение уравнения (16.8) было неустойчивым, необходимо, чтобы соответствующее решение уравнения (16.7) нарастало как  $\exp(p\tau)$ , где  $p > \gamma$ . Поэтому границы зон неустойчивости сдвигаются вверх. Поскольку амплитуда воздействия должна превышать некоторое пороговое значение (которое увеличивается с ростом номера резонанса), говорят, что неустойчивость носит *пороговый характер*.

Отсюда следует, что нелинейность играет принципиальную роль в теории параметрических колебаний. Только учет нелинейных эффектов позволяет ответить на вопрос, чем заканчивается развитие неустойчивости на больших временах, и определить характеристики установившегося режима колебаний. Аналогичная ситуация имеет место и для автоколебаний (лекция 11).

### Нелинейный осциллятор с параметрическим возбуждением

В качестве простейшего нелинейного обобщения уравнения Матьё рассмотрим параметрически возбуждаемый осциллятор Дуффинга, добавив в уравнение (16.5) кубическую нелинейность. Будем анализировать ситуацию, когда колебания являются квазигармоническими. В этом случае система должна быть близка к гармоническому осциллятору, поэтому запишем уравнение в следующем виде

$$x'' + 2\varepsilon\gamma x' + \omega_0^2(1 + \varepsilon f \cos \omega t)x + \varepsilon x^3 = 0. \quad (16.9)$$

Здесь  $\varepsilon \ll 1$  — малый параметр, а  $\gamma$  и  $f$  — величины порядка единицы. Будем рассматривать случай основного параметрического резонанса, когда в формуле (16.6) следует положить  $n = 1$ . Таким образом

$$\omega = 2\omega_0 + \varepsilon\delta, \quad (16.10)$$

где  $\delta$  — параметр расстройки.

Получим укороченное уравнение для медленно меняющейся амплитуды колебаний. Используем метод многих масштабов (см. лекцию 9). Представим  $x$  в виде ряда

$$x = x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 + \dots, \quad (16.11)$$

и введем новые временные масштабы  $T_n = \varepsilon^n t$ . С учетом уравнения (16.10) можно записать, что

$$\omega t = 2\omega_0 T_0 + \delta T_1, \quad (16.12)$$

Подставим эти соотношения в уравнение (16.9) и выделим члены одинаковых порядков малости. Как и прежде, будем использовать обозначение  $\hat{D}_n = \partial/\partial T_n$ . В нулевом порядке получаем гармонического осциллятора

$$\hat{D}_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = 0, \quad (16.13)$$

решение которого можно представить в виде

$$x_1 = A(T_1) e^{i\omega_0 T_0} + \text{к.с.} \quad (16.14)$$

В первом порядке по  $\varepsilon$  имеем

$$\hat{D}_0^2 x_2 + \omega_0^2 x_2 = -(2\hat{D}_0 \hat{D}_1 x_1 + 2\gamma \hat{D}_0 x_1 + x_1^3 + f x_1 \cos \omega t). \quad (16.15)$$

В правую часть уравнения (16.15) следует подставить решение (16.14) для  $x_1$  и приравнять к нулю секулярные члены, пропорциональные  $\exp(i\omega_0 T_0)$ . С учетом выражения (16.12) нетрудно подсчитать, что

$$f\dot{x}_1 \cos \omega t = \frac{f}{2} \left( A \exp[i(3\omega_0 T_0 + \delta T_1)] + A^* \exp[i(\omega_0 T_0 + \delta T_1)] + \text{к.с.} \right). \quad (16.16)$$

Остальные слагаемые уже вычислялись нами ранее, например, при анализе осциллятора Дуффинга (лекция 9). В итоге можно получить укороченное уравнение в следующем виде:

$$A' + \gamma A = \frac{ifA^*}{4} e^{i\delta T_1} + \frac{3i|A|^2 A}{2}. \quad (16.17)$$

Здесь и далее штрих обозначает дифференцирование по медленному времени  $T_1$ .

Вводя в (16.17) вещественные амплитуду и фазу,  $A = \frac{1}{2} a \exp(i\varphi)$ , получаем

$$\begin{aligned} a' + \gamma a &= -\frac{fa}{4} \sin(\delta T_1 - 2\varphi), \\ \varphi' &= \frac{3a^2}{8} + \frac{f}{4} \cos(\delta T_1 - 2\varphi). \end{aligned} \quad (16.18)$$

Система уравнений (16.18) является неавтономной, так как в правые части явным образом зависят от времени. Однако ее можно превратить в автономную, если ввести резонансную фазу

$$\psi = \delta T_1 - 2\varphi. \quad (16.19)$$

Окончательно приходим к укороченным уравнениям

$$\begin{aligned} a' + \gamma a &= -\frac{fa}{4} \sin \psi, \\ \psi' &= \delta - \frac{3a^2}{4} - \frac{f}{2} \cos \psi. \end{aligned} \quad (16.20)$$

Найдем состояния равновесия системы (16.20), определяющие амплитуду и фазу установившихся колебаний. Для них будем иметь уравнения

$$\begin{aligned} \gamma a_0 &= -\frac{fa_0}{4} \sin \psi_0, \\ \delta - \frac{3a_0^2}{4} &= \frac{f}{2} \cos \psi_0. \end{aligned} \quad (16.21)$$

Проанализируем полученные соотношения. Прежде всего, в отличие от вынужденных колебаний имеется тривиальное состояние равновесия  $a_0 = 0$ , которое отвечает отсутствию колебаний. Ненулевые решения системы (16.21) отвечают установившемуся режиму параметрических колебаний с постоянной амплитудой  $a_0$  и линейно изменяющейся фазой  $\varphi = (\delta T_1 - \psi_0)/2$ . Таким образом, колебания происходят на частоте  $\omega_0 + \varepsilon\varphi' = \omega_0 + \varepsilon\delta/2 = \omega/2$ , в точности равной половине частоты воздействия.

Исключим из уравнений (16.21) фазу  $\psi_0$ . Получим

$$\left(\delta - \frac{3a_0^2}{4}\right)^2 = \frac{f^2}{4} - 4\gamma^2. \quad (16.22)$$

Это уравнение дает зависимость установившейся амплитуды  $a_0$  от расстройки  $\delta$  — *резонансную кривую*. Разрешим его относительно  $\delta$ :

$$\delta = \frac{3a_0^2}{4} \pm \sqrt{\frac{f^2}{4} - 4\gamma^2}. \quad (16.23)$$

Таким образом, видно, что решение существует только при условии  $f > 4\gamma$ , т.е. существует порог неустойчивости.

Резонансные кривые при некотором фиксированном значении  $f$  приведены на рис. 16.4. Пунктирной линией показана «скелетная кривая»

$$\delta = \frac{3a_0^2}{4}. \quad (16.24)$$

Что касается фазы  $\psi_0$ , то для нее из уравнений (16.21) можно найти два значения, отличающиеся на  $\pi$ , которые соответствуют двум ветвям резонансной кривой.

При изменении параметра диссипации  $\gamma$  вид резонансных кривых качественно не изменяется. С ростом  $\gamma$  ветви кривой сближаются; при  $\gamma > f/4$  решения с ненулевой амплитудой отсутствуют, т.е. возбуждение параметрических колебаний невозможно.

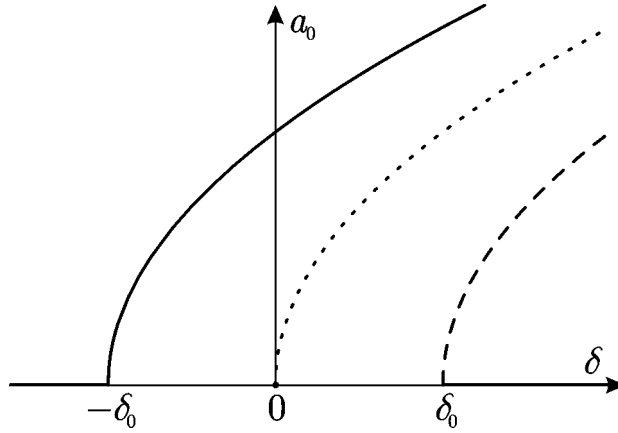


Рис. 16.4. Резонансные кривые параметрических колебаний нелинейного осциллятора ( $\delta_0 = \sqrt{f^2/4 - 4\gamma^2}$ ). Сплошная линия — устойчивые участки резонансной кривой, штриховая — неустойчивые, пунктирная — скелетная кривая (16.24).

Теперь необходимо исследовать полученные решения на устойчивость. Полагая  $a = a_0 + \xi$ ,  $\psi = \psi_0 + \eta$ , где  $\xi, \eta$  — малые возмущения, линеаризуем укороченные уравнения (16.20). Получим

$$\begin{aligned}\xi' + \gamma\xi &= -\frac{f\xi}{4} \sin \psi_0 - \frac{fa_0\eta}{4} \cos \psi_0, \\ \eta' &= -\frac{3a_0\xi}{2} - \frac{f\eta}{2} \sin \psi_0.\end{aligned}\tag{16.25}$$

Удобно исключить отсюда  $\psi_0$  при помощи соотношений (16.21):

$$\begin{aligned}\xi' &= -\frac{a_0}{2} \left( \delta - \frac{3a_0^2}{4} \right), \\ \eta' &= -\frac{3a_0\xi}{2} - 2\gamma\eta.\end{aligned}\tag{16.26}$$

Отыскивая решение в виде  $\xi, \eta \sim \exp(pT_1)$ , получаем характеристическое уравнение

$$p^2 + 2\gamma p - \frac{3a_0^2}{4} \left( \delta - \frac{3a_0^2}{4} \right) = 0.\tag{16.27}$$

Анализируя корни этого уравнения, нетрудно показать, что при условии

$$\delta > \frac{3a_0^2}{4}\tag{16.28}$$

состояние равновесия является седлом. Как видно из уравнения (16.23), это условие соответствует правой ветви резонансной кривой, которая, таким образом, является неус-



тойчивой. Левая ветвь, для которой  $\delta < 3a_0^2/4$ , устойчива, причем можно показать, что состояние равновесия будет являться устойчивым узлом при

$$\frac{3a_0^2}{4} - \frac{4\gamma^2}{3a_0^2} < \delta < \frac{3a_0^2}{4} \quad (16.29)$$

и устойчивым фокусом при

$$\delta < \frac{3a_0^2}{4} - \frac{4\gamma^2}{3a_0^2}. \quad (16.30)$$

В первом случае амплитуда колебаний с течением времени монотонно приближается к стационарному значению, во втором случае переходный процесс носит осциллирующий характер.

Осталось исследовать на устойчивость нулевое состояние равновесия. Собственно говоря, такой анализ эквивалентен определению условий параметрической неустойчивости для уравнения Матьё в области основного резонанса (см. книгу «Линейные колебания и волны»). Тем не менее, проделаем выкладки до конца. Отбросим в укороченном уравнении (16.17) нелинейное слагаемое и сделаем замену  $A = B \exp[i\delta T_1/2]$ .

Получим

$$B' + \left( \gamma + \frac{i\delta}{2} \right) B = \frac{ifB^*}{4} \quad (16.31)$$

Подставляя решение в виде  $B, B^* \sim \exp[pT_1/2]$  и умножая на комплексно сопряженное выражение, находим характеристическое уравнение

$$(p + 2\gamma)^2 + \delta^2 = \frac{f^2}{4}. \quad (16.32)$$

Корни этого уравнения есть

$$p = -2\gamma \pm \sqrt{\frac{f^2}{4} - \delta^2}. \quad (16.33)$$

Следовательно, нулевое состояние равновесия неустойчиво при

$$\delta^2 < \frac{f^2}{4} - 4\gamma^2 \equiv \delta_0^2. \quad (16.34)$$

Чтобы представить себе окончательную картину, вновь обратимся к рис. 16.4, где устойчивые участки резонансных кривых изображены сплошными линиями, неустойчивые — штриховыми. В области  $\delta < -\delta_0$  имеется единственное устойчивое состояние равновесия  $a_0 = 0$ , т.е. возбуждение параметрических колебаний невозможно. В области  $-\delta_0 < \delta < \delta_0$  нулевое состояние равновесия теряет устойчивость, и появляется устойчивое равновесие, отвечающее режиму стационарных одночастотных колебаний. Наконец, в области  $\delta > \delta_0$  наблюдается бистабильность: сосуществуют два устойчивых состояния, одно из которых соответствует стационарному периодическому режиму, другое — отсутствию колебаний. В этой области возможно жесткое возбуждение колебаний: малые возмущения затухают, тогда как возмущения с достаточно большой амплитудой нарастают и переходный процесс завершается установлением периодических колебаний с постоянной амплитудой. Эта ситуация аналогична жесткому возбуждению автоколебаний, рассмотренному в лекции 12.

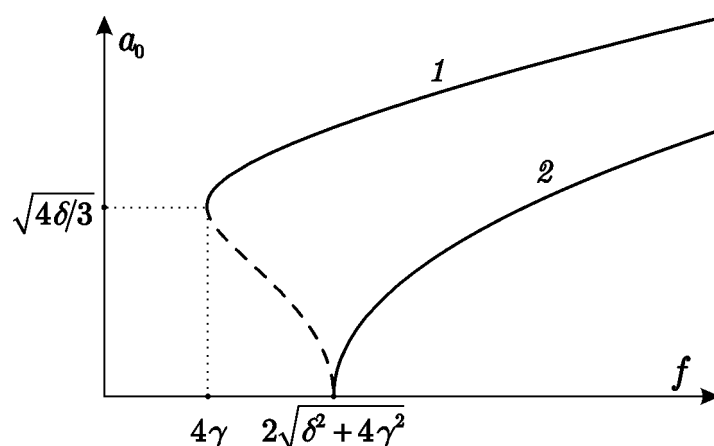


Рис. 16.5. Зависимости  $a(f)$  при  $\delta = \text{const}$ : 1 —  $\delta > 0$ ; 2 —  $\delta < 0$ . Сплошной линией показаны устойчивые участки, штриховой — неустойчивые.

Интерес представляют также зависимости  $a(f)$  при фиксированной расстройке  $\delta$ . Типичный вид этих зависимостей приведен на рис. 16.5. Как видно, в зависимости от знака  $\delta$  они имеют качественно различный характер. При  $\delta > 0$  зависимость  $a_0(f)$  является неоднозначной, что согласуется с наличием двух ветвей у резонансной кривой (см. рис. 16.4). Однако нижняя ветвь соответствует неустойчивым состояниям (она показана на рис. 16.5 штриховой линией). При  $\delta < 0$  имеется только одно возможное состояние  $a_0(f)$ , и это состояние устойчиво.

Можно изобразить границы областей самовозбуждения на плоскости параметров  $(f, \delta)$  (рис. 16.6). Граница мягкого возбуждения находится из уравнения (16.34). Она приближенно воспроизводит форму «клюва» Матьё для основного резонанса. Граница жесткого возбуждения представляет собой горизонтальную полупрямую  $f = 4\gamma$  при  $\delta > 0$ .

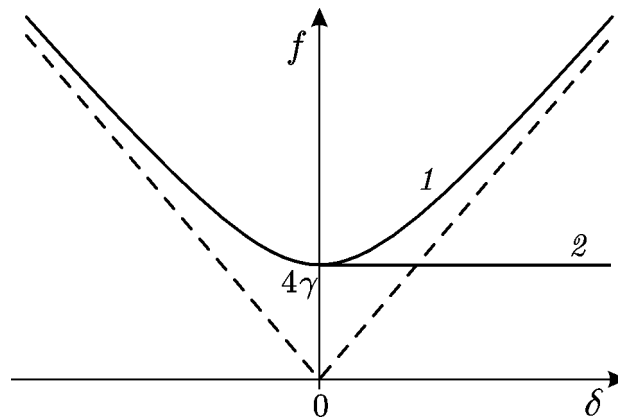


Рис. 16.6. Границы областей мягкого (1) и жесткого (2) возбуждения на плоскости параметров  $(f, \delta)$ . Асимптоты — границы мягкого возбуждения для консервативного осциллятора ( $\gamma = 0$ ).

Итак, развитие параметрической неустойчивости завершается установлением режима стационарных периодических колебаний. Механизм насыщения неустойчивости связан с неизохронностью осциллятора (как и при вынужденных колебаниях, лекция 13). Поскольку частота собственных колебаний зависит от энергии, с ростом амплитуды она изменяется и резонансные условия нарушаются. В теории параметрических колебаний этот механизм носит название *расстройного*.

Мы рассмотрели лишь случай слабой надкритичности, когда колебания являются квазигармоническими. При больших амплитудах воздействия возможны более сложные, в том числе хаотические, режимы колебаний. Здесь ситуация также вполне аналогична вынужденным колебаниям нелинейного осциллятора. Однако рассмотрение этих вопросов выходит за рамки данной книги.