

Лекция 15

Сложная динамика и хаос при вынужденных колебаниях нелинейного осциллятора

В предыдущей лекции мы рассматривали вынужденные колебания нелинейного осциллятора в рамках метода медленно меняющихся амплитуд. Перейдем теперь к обсуждению ситуаций, когда это приближение становится неработоспособным, а осциллятор может демонстрировать сложные динамические режимы, такие как хаотические колебания. Это происходит при достаточно больших амплитудах внешней силы, когда колебания становятся сильно нелинейными. Возникновению хаоса весьма способствует также ангармоничность воздействия, когда сила несинусоидальная и содержит много гармоник (например, когда воздействие на осциллятор производится последовательностью коротких импульсов). Как мы увидим, материал предыдущей лекции оказывается существенным для понимания качественных особенностей поведения системы и в таких ситуациях. Ключевую роль играет представление о нелинейном резонансе, на основании которого формулируется простое условие возникновения хаоса – критерий перекрытия резонансов Б.В. Чирикова.

Резонанс на гармониках и субгармониках

Рассмотрим консервативный осциллятор при воздействии внешней силы, зависящей от времени с периодом $T = 2\pi/\Omega$. Представим ее в виде ряда Фурье, причем коэффициенты разложения будем считать зависящими от текущего значения обобщенной координаты x :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(x) e^{im\Omega t}, \quad f_m(x) = \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} F(x, t) e^{-im\Omega t} dt. \quad (15.1)$$

Это очень общая форма уравнения. Обсуждавшиеся в предыдущей лекции нелинейные осцилляторы, как с силовым, так и с параметрическим внешним воздействием, представляют собой его определенные частные случаи. (Подумайте, в каком виде надо задать функции $f_m(x)$, чтобы получить, например, уравнение (14.1) или (14.2)).

В нулевом приближении, пренебрегая совсем правой частью уравнения (15.1), находим решение в виде $x^{(0)} = A \cos \omega_0 t$, где A – константа, определяющая амплитуду ко-

лебаний. Намреваясь получить следующее приближение, мы должны подставить это выражение в правую часть. При этом каждый коэффициент $f_m(x)$ становится периодической функцией времени и может быть, в свою очередь, представлен в виде ряда Фурье:

$$f_m(A \cos \omega_0 t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_{mn} e^{in\omega_0 t}, \quad f_{mn} = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} f_m(A \cos \omega_0 t) e^{-in\omega_0 t} dt. \quad (15.2)$$

Поэтому для первого приближения получаем

$$\ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{mn} e^{i(m\Omega + n\omega_0)t}. \quad (15.3)$$

Если какой-либо из членов в правой части отвечает колебаниям точно на собственной частоте осциллятора ω_0 , то возникает резонанс: в решении $x^{(1)}$ появится колебательная составляющая, амплитуда которой будет нарастать во времени по линейному закону — секулярный, или вековой член (термин из небесной механики).

Это явление обсуждалось в предыдущих лекциях, но здесь мы отмечаем новый момент. Резонанс и появление секулярных членов будет иметь место *не только при совпадении частоты внешнего воздействия с собственной частотой, но и при выполнении соотношения между частотами вида $m\Omega + n\omega_0 = \pm\omega_0$* , или, что то же самое,

$$m\Omega + k\omega_0 = 0, \quad (15.4)$$

где m и $k = n \mp 1$ — целые числа. В этом случае говорят о *резонансе на гармониках и субгармониках* основной частоты Ω . Обычно коэффициенты Фурье f_{mn} достаточно быстро убывают с ростом индексов, так что существенными оказываются только «*главные резонансы*», характеризующиеся относительно небольшими m и n .

Вопрос: Каким значениям m и n отвечает рассмотренный в предыдущей лекции *основной резонанс*?

Чтобы избежать секулярного роста возмущений, метод последовательных приближений модифицируют, принимая во внимание зависимость частоты собственных колебаний от амплитуды $\omega_0 = \omega(A)$, как это было объяснено в предыдущей лекции для основного резонанса. Не прорабатывая детально соответствующие выкладки, представим некоторые оценки, существенные для дальнейшего изложения.

Предположим, что имеет место отстройка по частоте от резонанса $\Delta\omega$. Тогда амплитуда резонансного возмущения будет равна по порядку величины, очевидно,

$\Delta A \cong f_{mn} / [\omega(A)\Delta\omega]$, откуда $\Delta\omega \cong f_{mn} / [\omega(A)\Delta A]$. С другой стороны, изменение частоты в силу неизохронности осциллятора при изменении амплитуды на величину ΔA составит $\Delta\omega \cong |d\omega(A)/dA|\Delta A$. Потребуем, чтобы оба частотных сдвига были одного порядка. Отсюда получаем величину, о которой будем говорить как о *ширине нелинейного резонанса по амплитуде*

$$\Delta A \cong \sqrt{\frac{f_{mn}}{\omega(A) \cdot d\omega(A)/dA}} \quad (15.5)$$

и, соответственно, *ширину нелинейного резонанса по частоте*

$$\Delta\omega \cong |d\omega(A)/dA|\Delta A \cong \sqrt{f_{mn} [\omega(A)]^{-1} d\omega(A)/dA}. \quad (15.6)$$

Резонансы на фазовом портрете в сечении Пуанкаре

Рассмотрим вопрос о наглядном геометрическом представлении динамики нелинейного осциллятора с внешним периодическим воздействием.

Предположим сначала, что амплитуда воздействия исчезающе мала. В отсутствие внешней силы на фазовой плоскости консервативного нелинейного осциллятора свободные колебания различной амплитуды изображаются набором вложенных друг в друга замкнутых кривых (рис. 15.1а). Мы, однако, намерены рассуждать сейчас в терминах введенного в предыдущей лекции отображения Пуанкаре – стробоскопического отображения за период внешней силы, которая будет включена в рассмотрение на следующем этапе. Поэтому картинке следует придавать смысл, отличающийся от привычного случая фазового портрета нелинейного осциллятора. Надо представлять себе, что эволюция происходит дискретными скачками: изображающая точка не движется плавно по фазовой траектории, а перепрыгивает раз за разом на новое место, оставаясь, однако, все время на той же самой замкнутой кривой (рис. 15.1а). Какую долю полной длины этой кривой проходит изображающая точка за один скачок, зависит от соотношения периода собственных колебаний и периода воздействия, определяющего временной интервал между последовательно рассматриваемыми положениями точки. В типичной ситуации нелинейный осциллятор неизохронный, так что период свободных колебаний на разных орбитах разный. На какой-то орбите он окажется в иррациональном отношении с периодом воздействия. Тогда наносимые на график положения изображающей точки в процессе динамики постепенно заполнят всю кривую. Если же от-

ношение рациональное, то будет наблюдаться посещение изображающей точкой лишь определенного конечного множества точек на кривой. Такая ситуация будет соответствовать выполнению каждого из резонансных условий вида $m\Omega + n\omega(A) = 0$.

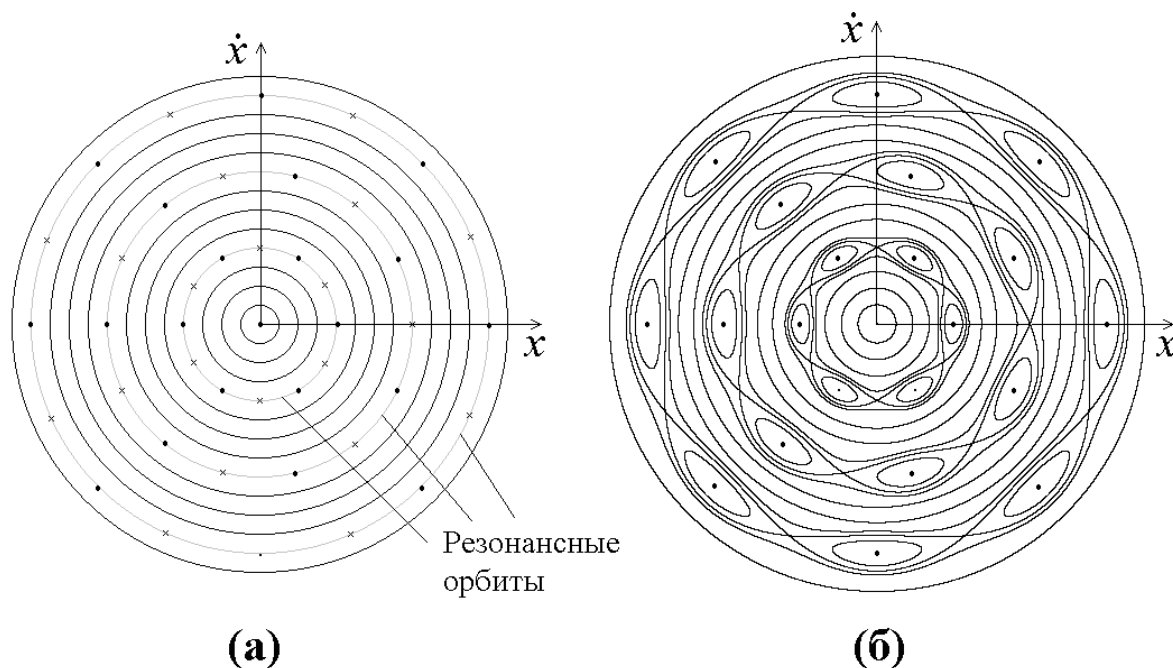


Рис.15.1. Схема, иллюстрирующая фазовый портрет нелинейного осциллятора в стробоскопическом сечении Пуанкаре при исчезающе малой амплитуде периодического внешнего воздействия (а) и при конечной амплитуде (б).

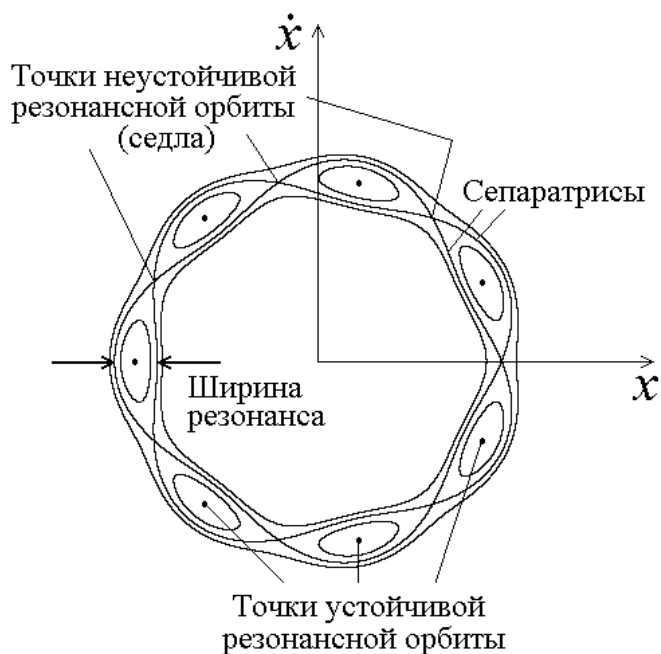


Рис.15.2. Фазовый портрет изолированного нелинейного резонанса в стробоскопическом сечении Пуанкаре с подписями, поясняющими основные элементы картины.

Как модифицируется картина, если амплитуда воздействия будет малой, но конечной? Нерезонансные орбиты (далекие от «главных резонансов») слегка деформируются.

ся, но качественно не изменятся: нерезонансное возмущение подталкивает осциллятор то туда, то сюда, но в среднем накопления возмущений не происходит.

Существенно трансформируется устройство портрета в областях резонансов. Предположим, что мы рассматриваем колебания осциллятора при некоторых определенных начальных условиях. В зависимости от соотношения фазы колебаний осциллятора и фазы внешней силы она может отдавать энергию осциллятору или забирать ее. В первом случае амплитуда колебаний будет нарастать во времени, во втором – убывать. Когда амплитуда увеличивается или уменьшается, то в силу неизохронности осциллятора это приводит к изменению частоты его собственных колебаний. Соответственно, начинает меняться и соотношение фаз, так что через некоторое время нарастание амплитуды сменится затуханием и наоборот. Это так называемые *фазовые колебания при нелинейном резонансе*. На фазовом портрете соответствующие орбиты образуют характерные «ожерелья» в области резонансов, см. рис. 15.1б.

Вообще говоря, фазовые колебания квазипериодические (их частота и частота воздействия не обязаны находиться в рациональном отношении). Однако в области резонанса имеются две специальные *периодические резонансные орбиты*, одна устойчивая, а другая неустойчивая. Обе содержат одинаковое конечное число точек, которое определяется порядком резонанса. Эти орбиты отвечают таким соотношениям фаз собственных колебаний и внешней силы, при которых энергия в среднем не передается осциллятору, и не забирается у него. Точки устойчивой орбиты окружены замкнутыми кривыми, соответствующими фазовым колебаниям. Точки неустойчивой орбиты расположены на пересечении сепаратрис. Максимальное расстояние между сепаратрисами, ограничивающими область одного определенного резонанса, соответствует нашей оценке ширины резонанса (15.6). Заметим, что она пропорциональна корню квадратному из амплитуды воздействующей на осциллятор внешней силы. Все основные элементы описанной картины представлены на рис.15.2.

Вспомним теперь, что резонансная область на самом деле не одна, так как имеются резонансы, отвечающие разным значениям индексов в соотношении (15.4). При малой амплитуде внешней силы ширина резонансов по частоте мала по сравнению с расстоянием между ними, и их можно рассматривать независимо. Однако при достаточно большой амплитуде ширина резонансов становится сравнимой с расстоянием между ними, и говорят о *перекрывании резонансов*. В этом случае характер динамики изменяется. Качественно ее можно представить себе как блуждание между различными резонан-

сами, так что изображающая точка получает возможность посещать достаточно обширную область фазового пространства, и колебания становятся хаотическими. Утверждение, что перекрытие резонансов отвечает возникновению хаоса, составляет содержание *критерия Чирикова*.

Этот критерий имеет не только качественное содержание, но приводит к формулировке приближенных соотношений между параметрами задачи, выполнение которых необходимо для возникновения хаоса.

Ограничимся для простоты учетом резонансов только на гармониках частоты воздействия: $m\Omega = \omega(A)$. Каждой m -ой гармонике будет соответствовать некоторый интервал по амплитуде, где имеет место резонанс: его центр располагается вблизи значения A_m , получаемого как корень уравнения $m\Omega = \omega(A_m)$. Расстояние по частоте между соседними резонансами равно, очевидно, Ω , а ширина резонанса дается формулой (15.6): $\Delta\omega \cong \sqrt{|f_{m0}\omega'(A)/\omega(A)|}$. Введем параметр, определяющий отношение двух указанных величин

$$K = \frac{\Delta\omega}{\Omega} = \Omega^{-1} \sqrt{\left| \frac{f_{m0}\omega'(A_m)}{\omega(A_m)} \right|}. \quad (15.7)$$

При $K \ll 1$ резонансы изолированы друг от друга, и динамика регулярная. При $K \approx 1$ возникает перекрытие резонансов, и колебания могут стать хаотическими. При $K \gg 1$ будет наблюдаться развитый хаос.

Если рассмотреть задачу о вынужденных колебаниях маятника или другого осциллятора, имеющего наряду с устойчивыми также неустойчивые состояния равновесия (седла), то наиболее благоприятными для возникновения хаоса оказываются области в окрестности сепаратрис. В самом деле, вблизи сепаратрисы период колебаний стремится к бесконечности, т.е. зависимость периода и частоты колебаний от частоты очень сильная, а в формуле (15.7) величина $|\omega'(A)|$, как можно видеть, фигурирует в числителе. Поэтому даже при небольшой амплитуде воздействия, когда в остальных областях фазового пространства движение еще вполне регулярное, вблизи сепаратрисы образуется область хаоса, так называемых *стохастический слой*.

С ростом амплитуды воздействия ширина этого слоя, разумеется, увеличивается. С физической точки зрения, ситуация вполне очевидна. Колебания вблизи сепаратрисы

отвечают тому, что маятник при максимальном отклонении почти достигает верхней точки. Если его в этот момент легонько подтолкнуть туда или сюда, то он пойдет, соответственно, вперед или назад. Роль такого толчка выполняет внешняя сила, а результат зависит от того, на какой момент по отношению к фазе воздействия придется максимальное отклонение маятника. Существенное обстоятельство состоит в том, что движение обладает чувствительной зависимостью от начальных условий, а это как раз основной атрибут хаотической динамики. В самом деле, если скорость чуть-чуть больше, то маятник проскочит верхнее положение равновесия, если скорость чуть-чуть меньше – не дойдет до него и двинется назад.

На рис.15.3 приводятся результаты численного эксперимента с уравнением маятника

$$\ddot{x} + \sin x = b \cos \Omega t \quad (15.8)$$

при фиксированном значении частоты $\Omega=2.8$ и различных амплитудах воздействия. Приведены фазовые портреты в стробоскопическом сечении: в моменты времени $t = 2\pi m/\Omega$ (m – целое) по оси абсцисс откладывается угловая координата маятника x , отнесенная к интервалу от $(-\pi, \pi)$, а по оси ординат – скорость \dot{x} . Первая диаграмма (а) отвечает нулевой амплитуда вынуждающей силы, а диаграммы (б), (в), (г) – значениям $b=0.3, 2$ и 4 , соответственно.

Задача 15.1. Внимательно рассмотрите диаграммы на рис.15.3 и сравните их друг с другом. Проинтерпретируйте картину в свете качественных рассуждений этого и предыдущего параграфов. Обратите внимание на образование стохастического слоя на месте разрушившейся сепаратрисы и на его расширение с ростом амплитуды воздействия. На диаграммах (б)-(г) укажите области нелинейных резонансов. Какие орбиты отвечают фазовым колебаниям при нелинейном резонансе? Где находятся точки устойчивых периодических резонансных орбит, сепаратрисы, седловые точки?

Структуры, наблюдаемые на рис.15.3 (б)-(г) очень характерны для консервативных систем со сложной динамикой. В фазовом пространстве можно выделить «острова регулярности» (или «острова устойчивости»), и «хаотическое море». Если начальное условие в момент, отвечающий «вспышке стробоскопа», задано в пределах «острова регулярности», то движение будет квазипериодическим, т.е. оно допускает представление в виде комбинации колебательных составляющих с несоизмеримыми частотами. Такой характер движения сохраняется все время, как долго мы бы ни наблюдали за системой. Если же начальное условие задано в «хаотическом море», то изображающая точка будет вечно блуждать по этому «морю», посещая с течением времени сколь угодно ма-

люю окрестность каждой точки «моря», но никогда не попадет в «острова регулярности». На рис.15.4 представлены примеры, показывающие, как выглядят колебания во времени в острове регулярности, в хаотическом море, и на устойчивой резонансной периодической орбите.

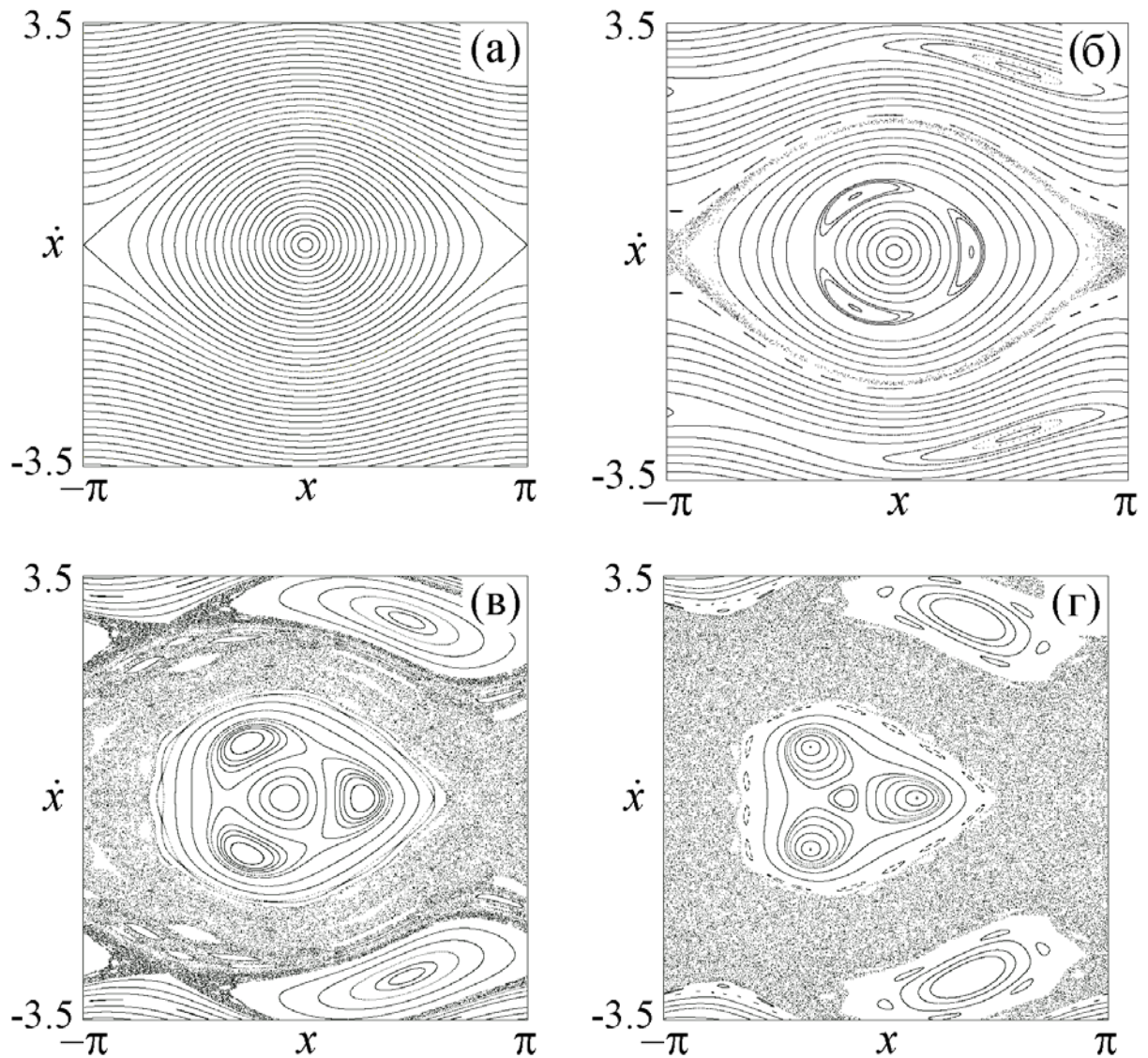


Рис.15.3. Фазовые портреты в стробоскопическом сечении для вынужденных колебаний маятника, полученные при численном решении уравнения (15.8). По осям координат отложена координата x , отнесенная к интервалу от $(-\pi, \pi)$, и скорость \dot{x} в моменты времени $t = 2\pi m/\Omega$ (m – целое). Параметр частоты фиксирован, $\Omega=2.8$, параметр амплитуды $b=0$ (а), 0.3 (б), 2 (в) и 4 (г).

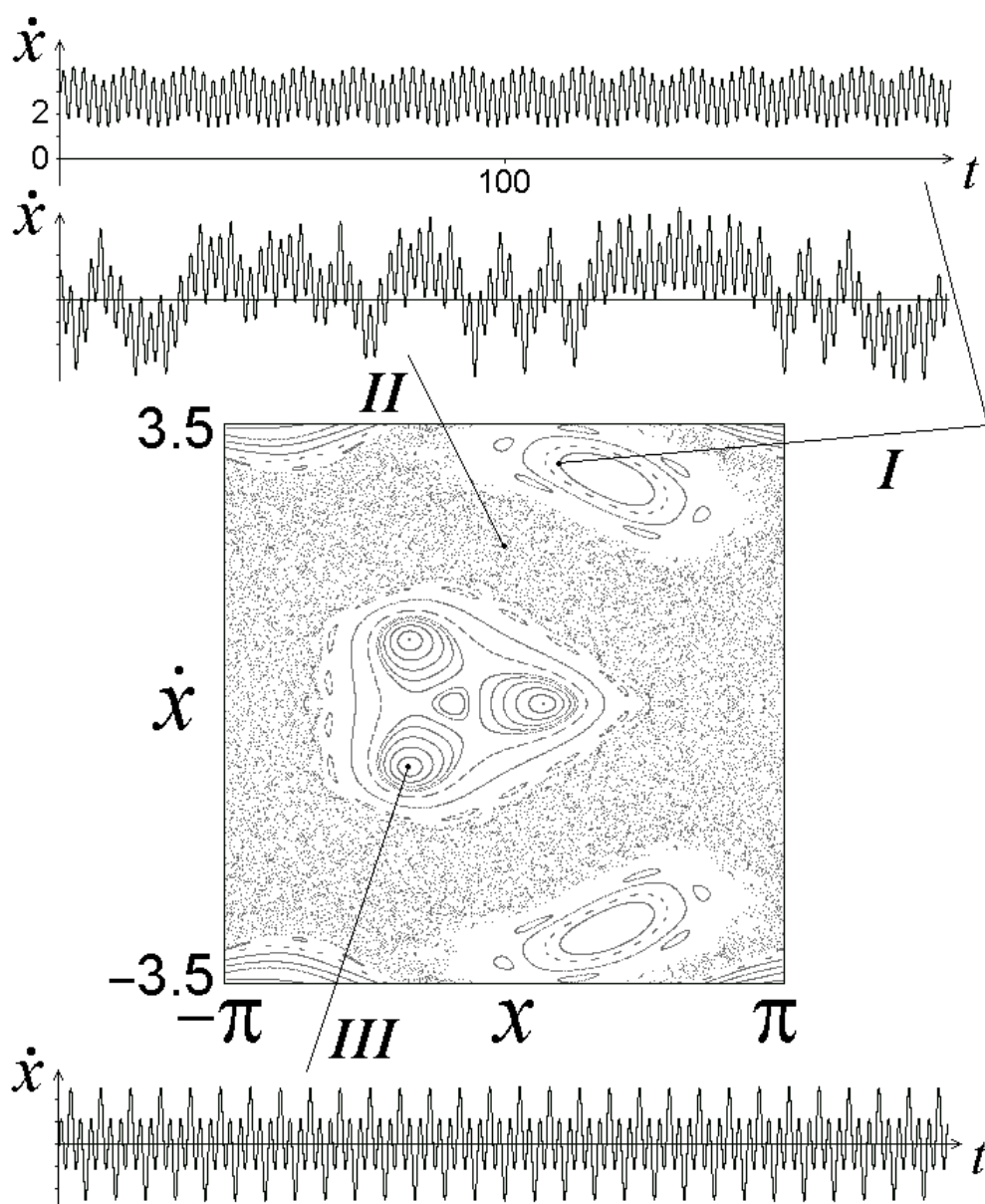


Рис.15.4. Фазовые портреты в стробоскопическом сечении для вынужденных колебаний маятника (15.8) при $\Omega=2.8$ и $b=4$ и зависимости скорости \dot{x} от времени, наблюдаемые (I) в «острове регулярности» (квазипериодическая динамика), (II) в «хаотическом море» и (III) на периодической резонансной орбите.

Перекрытие резонансов и хаос в простых системах (модели стохастического ускорения Ферми)

В 1949 г. известный своими выдающимися работами физик Энрико Ферми опубликовал статью «О происхождении космического излучения». В ней он предложил механизм образования частиц высокой энергии, которые, как известно, непрерывно бомбардируют нашу Землю из космоса (так называемые «космические лучи»). Идея *стохастического ускорения Ферми* состоит в том, что, двигаясь хаотически в межзвездном

пространстве, заряженные частицы испытывают взаимодействие с «магнитными облаками», образованными межзвездным газом с «вмороженными» в них магнитными полями. Эти «магнитные облака» можно мыслить просто как частицы очень большой массы, с которыми в процессе неупорядоченного хаотического движения микрочастицы претерпевают упругие столкновения. В целом система «магнитные облака плюс микрочастицы» должна стремиться к термодинамическому равновесию, а в равновесном состоянии, согласно представлениям статистической физики, на каждую степень свободы должна приходиться одна и та же энергия. Поскольку «магнитные облака» характеризуются массой, превышающей на много порядков массу микрочастиц, то в процессе выравнивания соответствующих кинетических энергий скорости микрочастиц должны нарастать до огромных величин. По предположению Ферми, ускоренные за счет такого механизма частицы мы и наблюдаем, как приходящие из космоса на Землю.

Чтобы проиллюстрировать идею Ферми, математик С. Улам предложил в начале 60-х годов простую модель, показанную на рис.15.5 (а,б). Частица свободно движется влево - вправо вдоль оси x , испытывая упругие соударения с двумя вертикальными стенками бесконечно большой массы, расположенными на расстоянии L друг от друга. Одна из стенок совершает колебания с некоторой частотой Ω по закону $x = a \sin \Omega t$, так что ее скорость $V(t) = V_0 \cos \Omega t$, где $V_0 = a\Omega$. Если частица налетает на эту «активную» стенку в момент t_n со скоростью v_n , то после упругого удара ее скорость станет равной $v_n + 2V_0 \cos \Omega t_n$. При соударении со второй, «пассивной» стенкой скорость частицы изменяет направление на противоположное, а по модулю остается неизменной.

Хотя постановка задачи выглядит элементарной, описать движение частицы в модели Улама математически в форме пригодной для составления компьютерной программы не так уж просто. (В самом деле, при учете конечной амплитуды колебаний стенки определение момента столкновения частицы с ней требует решения трансцендентного уравнения.) С другой стороны, собственно механизм стохастического ускорения, который мы хотим проиллюстрировать, должен быть нечувствительным к деталям модели. Поэтому обратимся к упрощенной версии модели Улама. Предположим, что справедливо неравенство $a/L \ll 1$, и будем считать, что столкновение с «активной» стенкой происходит в момент пересечения частицей плоскости $x = 0$.

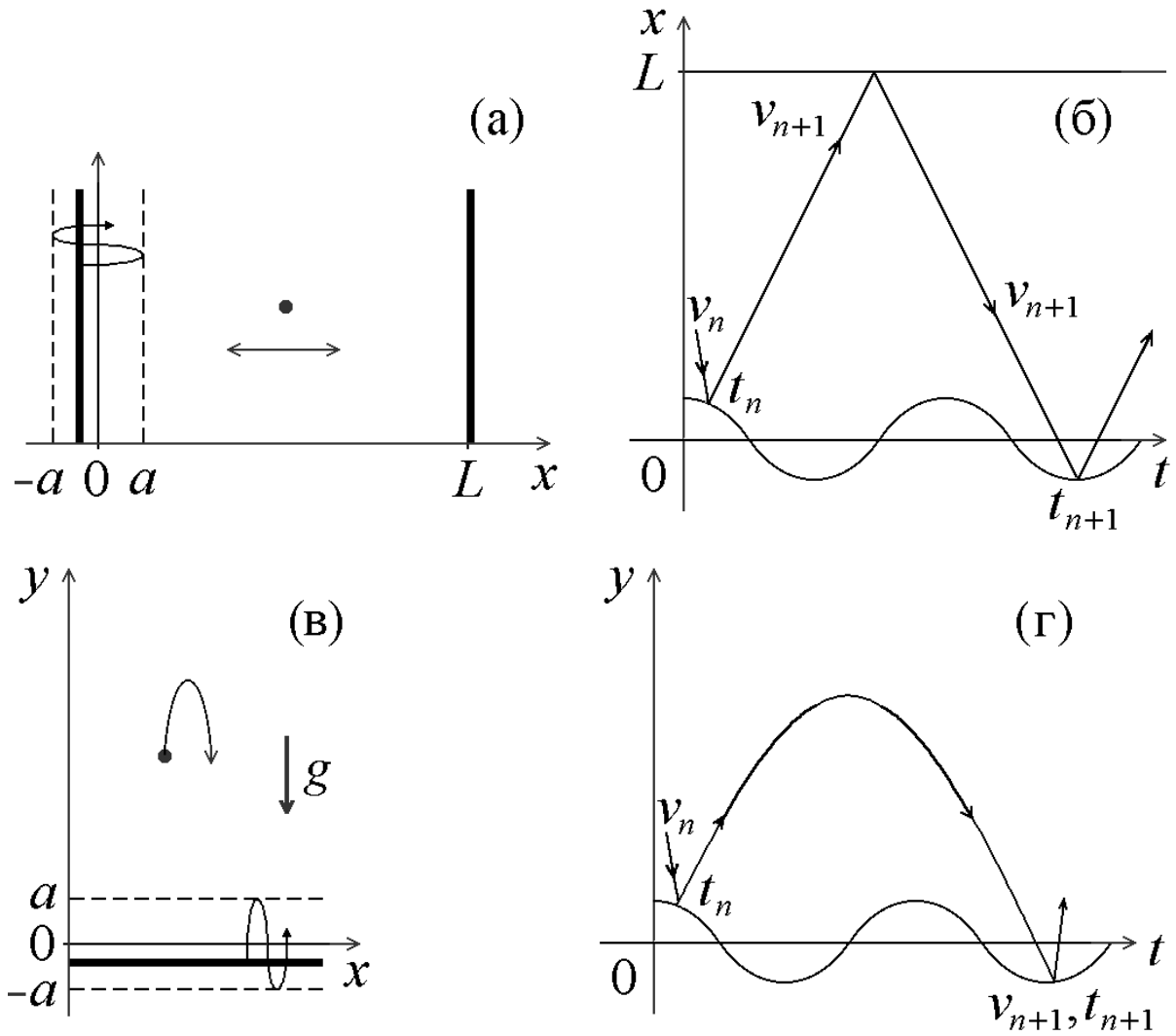


Рис.15.5. Модели стохастического ускорения Ферми, предложенные Уламом (а,б) и Заславским (в,г): схематическое изображение и пространственно-временные диаграммы, иллюстрирующие движение частицы и принятые в тексте обозначения.

Если частица имела перед ударом скорость v_n , а столкновение с «активной стенкой» произошло в момент t_n , то после удара она улетает от стенки со скоростью $v_{n+1} = v_n + 2V_0 \cos \Omega t_n$, время пролета до другой стенки и обратно составит $2L/v_{n+1}$, и время следующего соударения дается выражением $t_{n+1} = t_n + 2L/v_{n+1}$. Полученные соотношения определяют *двумерное рекуррентное отображение*. Удобно ввести безразмерные переменные $u_n = v_n/2V_0$, $\tau_n = \Omega t_n/2\pi$ и параметр $\kappa = \Omega L/2\pi V$. Тогда уравнения принимают вид

$$u_{n+1} = u_n + \cos 2\pi\tau_n, \quad \tau_{n+1} = \tau_n + \kappa/u_{n+1}. \quad (15.9)$$

Надо заметить, что система уравнений (15.9) в области малых скоростей u оказывается некорректной. Более того, переменная u и, соответственно, приращение величины τ , могут стать отрицательными

в процессе динамики, а это в терминах исходной модели Улама заведомо лишено физического смысла. Тем не менее, в области больших скоростей динамика передается в достаточной степени адекватно, так что для выяснения принципиальной возможности и условий реализации стохастического ускорения отображение (15.9) все же можно использовать.

Используя уравнения (15.9), составим компьютерную программу, позволяющую шаг за шагом отслеживать эволюцию в дискретном времени пары величин (u_n, τ_n) и попытаемся пронаблюдать в численном эксперименте эффект стохастического ускорения. Поскольку масса частицы считается пренебрежимо малой по сравнению с массой стенки, можно было бы ожидать, что в силу тенденции к установлению термодинамического равновесия кинетическая энергия частицы будет в среднем неограниченно возрастать: $\langle u_n^2 \rangle \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Однако расчеты показывают, что это ожидание оказывается неоправданным: ускорение происходит только лишь до определенного предела, и среднестатистическая энергия частицы в итоге оказывается конечной (рис.15.6а). Тот же самый эффект обнаруживается в исходной модели Улама: наблюдаемая скорость частицы оставалась в большинстве случаев по порядку величины такой же, как скорость колебаний стенки. В чем же здесь дело? Ответ был дан в статье Г.М. Заславского и Б.В. Чирикова, опубликованной в 1964 г.

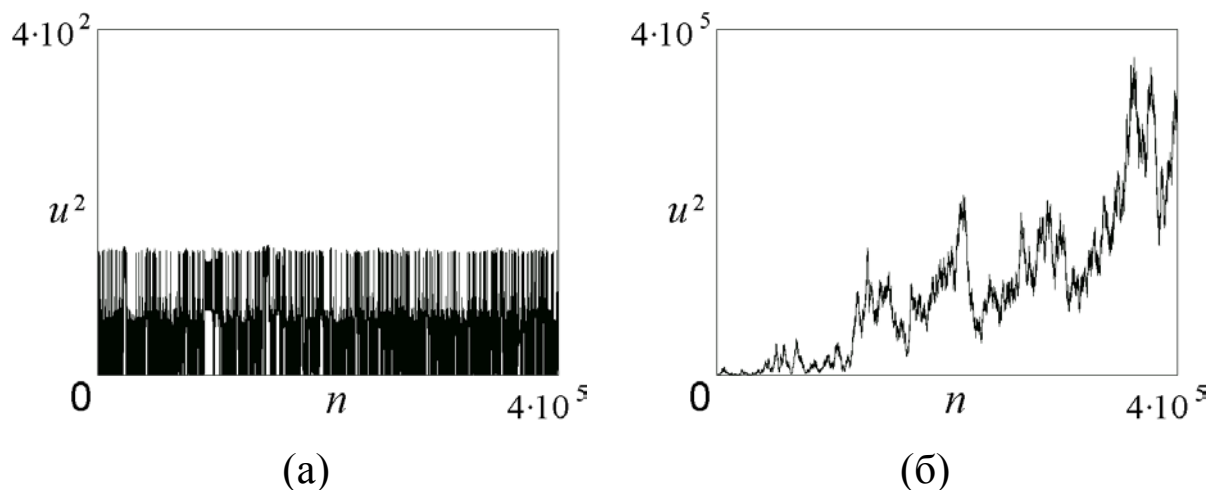


Рис.15.6. Зависимости квадрата скорости частицы от числа итераций для моделей Улама (а) и Заславского (б), полученные в численном эксперименте с уравнениями (15.9) и (15.10), соответственно. Параметр $\kappa=20$. Эффект стохастического ускорения хорошо виден во втором случае.

Посмотрим на рис. 15.7, где представлены результаты последовательных итераций отображения (15.9) с различными начальными условиями для $n=0 \div 10000$ на плоскости переменных τ_n, u_n . Видно, что в области малых скоростей u имеется область, по которой изображающая точка блуждает хаотически. В области больших скоростей u пове-

дение скорее регулярное: при заданных начальных условиях изображающая точка при последовательных итерациях попадает на одну и ту же определенную кривую. Здесь можно видеть характерные для нелинейных резонансов структуры в виде «ожерелий», подобные тем, что обсуждались в предыдущем параграфе. Из рисунка ясно, что при достаточно больших значениях нормированной скорости *перекрывания резонансов нет*. Согласно критерию Чирикова это значит, что нет и хаоса. Увеличение параметра κ приводит только к сдвигу «берега» хаотического моря вверх.

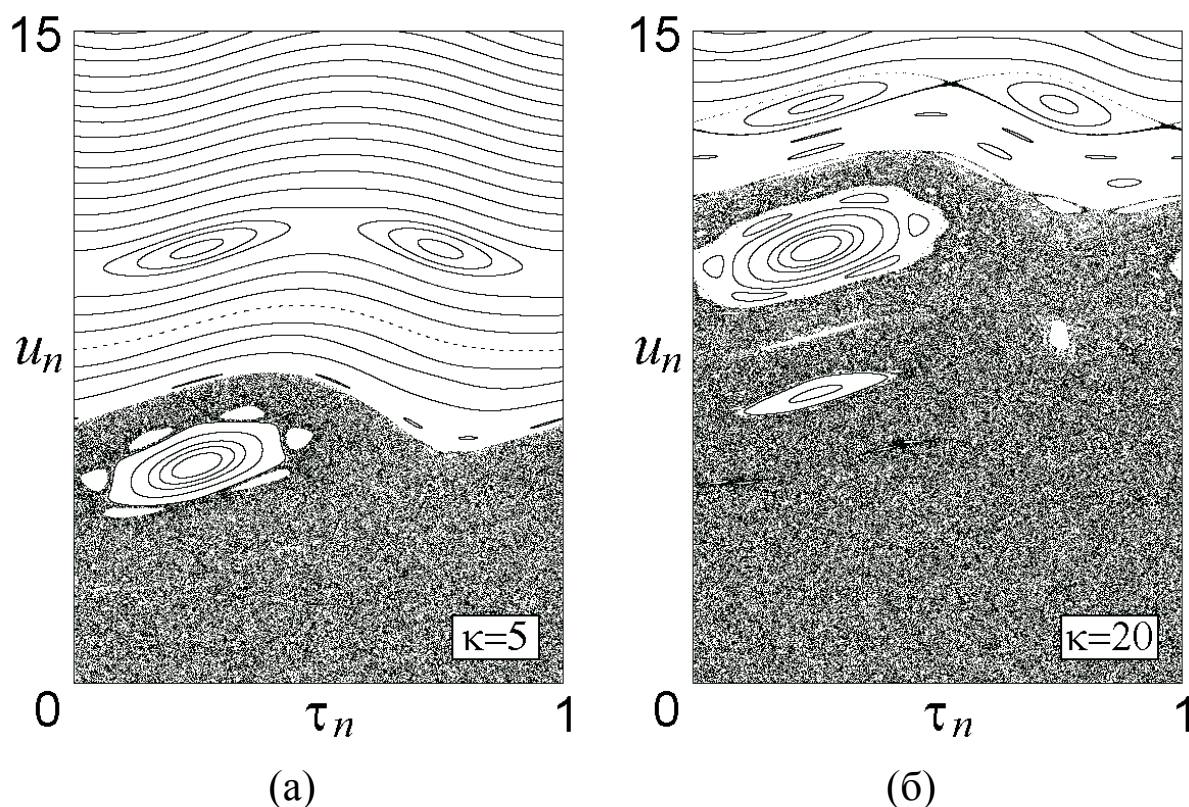


Рис.15.7. Фазовый портрет упрощенной модели Улама (15.9) при $\kappa=5$ и 20. По оси ординат отложена дробная часть $\{\tau_n\}$, а по оси абсцисс – нормированная скорость u_n . Обратите внимание на структуры, аналогичные по природе тем, которые наблюдались для нелинейного осциллятора (резонансные области, острова регулярности, хаотическое море). Область больших скоростей отвечает регулярной динамике, когда критерий хаоса, предполагающий перекрытие нелинейных резонансов, не выполняется.

Таким образом, причина парадокса проясняется. Заключение о стремлении системы к термодинамическому равновесию подразумевает, что составляющие ее частицы движутся хаотически, это должно относиться и к нашей модели. При малых скоростях все в порядке: время между ударами велико по сравнению с периодом колебаний стенки, частица при каждом ударе попадает в случайную фазу, и приобретает, соответственно, случайную добавку к скорости. Однако условие хаоса нарушено, если энергия частицы велика. В самом деле, с ростом скорости мы с неизбежностью придем к ситуации, когда частица будет преодолевать расстояние между стенками за время, сравнимое

с периодом колебаний «активной» стенки. Поэтому добавки к скорости, приобретаемые на каждом шаге, будут согласованы (коррелированы) друг с другом, динамика станет регулярной, и «стохастическое ускорение» не будет иметь места.

Можно ли модифицировать модель так, чтобы получить все-таки желаемый эффект неограниченного стохастического ускорения Ферми? Такая модель, известная как *гравитационная машина Заславского*, показана на рис.15.5 (в,г). Представим себе упругую частицу, подпрыгивающую в поле тяжести на массивно горизонтальной плите, которая совершает колебания вверх – вниз со скоростью $V(t) = V_0 \cos \Omega t$.

Как и в предыдущем случае, рассмотрим для простоты модифицированную версию модели. Будем считать, что пространственное расположение плиты фиксировано, но при соударении с ней в момент t_n частица отскакивает с изменившейся по величине скоростью $v_{n+1} = v_n + 2V_0 \cos \Omega t_n$.

Как известно из школьного курса физики, тело, брошенное вверх со скоростью v , упадет обратно через время $2v/g$, где g – ускорение свободного падения, и будет иметь в момент падения такую же по абсолютной величине скорость. Таким образом, время следующего удара частицы о плиту будет $t_{n+1} = t_n + 2v_{n+1}/g$.

Введем безразмерные переменные $u_n = v_n/2V_0$, $\tau_n = \Omega t_n/2\pi$ и параметр $\kappa = 2V_0 \Omega/\pi g$. Тогда уравнения принимают вид

$$u_{n+1} = u_n + \cos 2\pi\tau_n, \quad \tau_{n+1} = \tau_n + \kappa u_{n+1}. \quad (15.10)$$

В отличие от модели Улама, теперь с ростом энергии частицы время между последовательными соударениями не уменьшается, а увеличивается. В результате условие хаоса не нарушается при возрастании энергии, и «стохастическое ускорение» приводит к неограниченному росту средней энергии частицы (рис. 15.6 б).

Стандартное отображение

Рассмотрим следующую простую физическую систему (рис. 15.8). Пусть по проволоке длины L , замкнутой в кольцо, может без трения двигаться частица массы m , и пусть на нее действуют с периодом T импульсные толчки, интенсивность которых зависит от положения частицы в момент толчка. Будем считать, что передаваемый импульс в проекции на направление движения дается функцией $P(x) = P_0 \sin 2\pi x/L$, где x – расстояние, отсчитываемое вдоль проволоки.

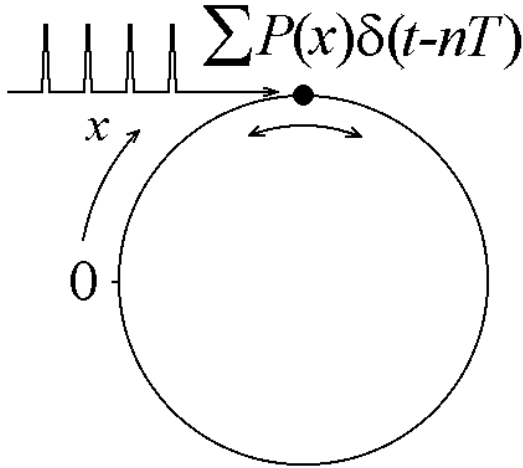


Рис. 15.8. Механическая система, динамика которой описывается стандартным отображением Чирикова – Заславского.

Если перед n -ым толчком координата частицы была x_n , а скорость v_n , то сразу после толчка скорость составит $v_n + (P_0/m)\sin(2\pi x_n/L)$, и будет оставаться неизменной до следующего толчка. К моменту очередного толчка будем иметь

$$v_{n+1} = v_n + (P_0/m)\sin(2\pi x_n/L), \quad x_{n+1} = x_n + v_{n+1}T. \quad (15.11)$$

Введем вместо x_n и v_n безразмерные переменные $\theta_n = 2\pi x_n/L$ и $u_n = 2\pi T v_n/L$, а также параметр $K = 2\pi T P_0/mL$. Тогда из (15.11) получаем

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + K \sin \theta_n, \\ \theta_{n+1} &= \{\theta_n + u_{n+1}\}. \end{aligned} \quad (15.12)$$

(Величина θ характеризует положение частицы на окружности, и принятая нормировка такова, что существенна только ее дробная часть, что учтено при записи второго уравнения.)

На рис. 15.9 приводятся полученные на компьютере фазовые портреты отображения (15.12). При малых значениях параметра K динамика регулярная, наблюдаются изолированные нелинейные резонансы. С ростом K сначала образуется узкий стохастический слой вблизи сепаратрис. Далее его ширина возрастает, и он дает начало «хаотическому морю». На последней представленной диаграмме это море занимает уже основную часть фазового пространства, хотя еще сохраняются острова регулярности, ассоциирующиеся с некоторыми из резонансов.

Отображение (15.12) называется *стандартным отображением Чирикова – Заславского*. Его применимость отнюдь не ограничивается рассмотренной нами конкретной механической системой. Чириков и Заславский показали, что это отображение возника-

ет в самых разнообразных консервативных системах при описании динамики в окрестности нелинейного резонанса с использованием естественных и разумных приближений.

Задача 15.2. Заменой переменных приведите отображение, описывающее гравитационную машину Заславского (15.10) к стандартному отображению (15.12).

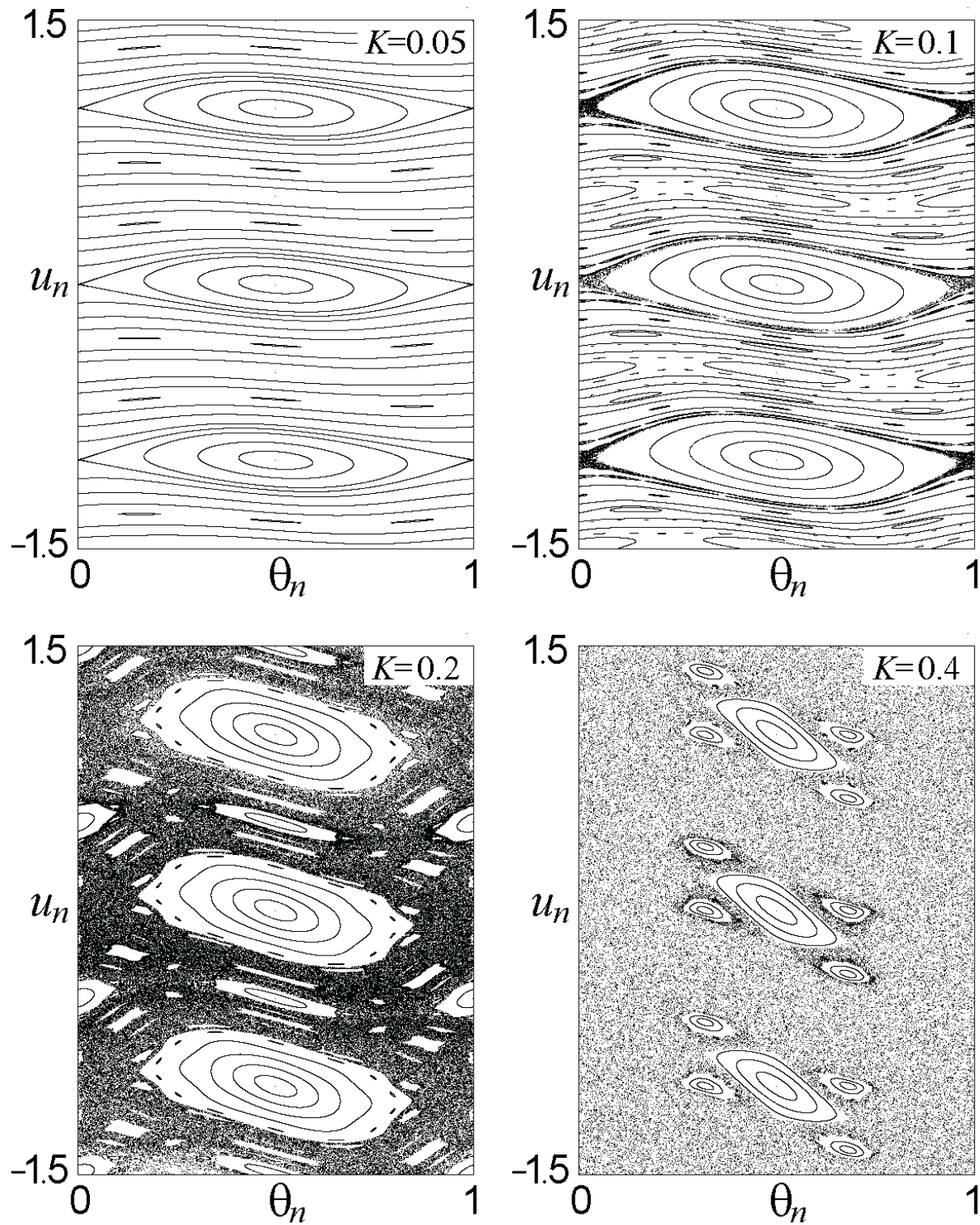


Рис.15.9. Фазовые портреты стандартного отображения (15.12) при различных значениях параметра K .

Хаос при вынужденных колебаниях диссипативного нелинейного осциллятора

Картина явлений, наблюдаемых при вынужденных колебаниях нелинейного осциллятора, существенно изменяется при наличии диссипации. Для иллюстрации рассмотрим две системы – маятник, вынужденные колебания которого описываются уравнением

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \sin x = b \cos \Omega t, \quad (15.13)$$

и осциллятор, в котором возвращающая сила зависит от смещения по кубическому закону (осциллятор Дуффинга)

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + x^3 = b \cos \Omega t. \quad (15.14)$$

Обсудим сначала, чего можно ожидать из самых общих соображений при включении очень малой диссипации. В лекции 5 было объяснено, как изменяется при учете диссипации вид фазового портрета свободных колебаний нелинейного осциллятора. В частности, особые точки типа центр превращаются в устойчивые фокусы: вместо незатухающих свободных колебаний, имевших место в консервативной системе, теперь получаем затухающие колебания. То же самое происходит с фазовыми колебаниями в окрестности нелинейного резонанса. При этом роль, которую играли особые точки типа центр, выполняют точки устойчивых периодических резонансных орбит. Поскольку в присутствии диссипации фазовые колебания затухают, эволюция состояния во времени завершается выходом на периодическую резонансную орбиту, которая служит аттрактором рассматриваемой динамической системы.

Как мы видели, при вынужденных колебаниях осциллятора нелинейных резонансов, вообще говоря, много. Соответствующие периодические резонансные орбиты сохраняются, пока диссипация достаточно мала, поэтому в фазовом пространстве будет сосуществовать множество аттракторов, в которые они превратились. Иными словами, имеет место мультистабильность. Чтобы попасть на какой-либо конкретный аттрактор, надо задать начальные условия в определенной области – в бассейне притяжения этого аттрактора. Заметим, что и в консервативном случае выбор начальных условий определял попадание в область того или иного резонанса.

Рассмотренный феномен имеет большое значение для небесной механики. Хотя диссипация, вносимая, в основном, приливными эффектами, очень мала, на астрономически больших временах она приводит ко вполне определенным, наблюдаемым в нашу эпоху эффектам. Например, вращение Луны вокруг своей оси и ее обращение вокруг Земли находится в резонансе 1:1. Период вращения Меркурия во-

круг своей оси и вокруг Солнца относятся как 2:3. Известны и другие примеры резонансных соотношений различных периодов обращения планет и спутников, которые читатель может разыскать самостоятельно в литературе о Солнечной системе.

В области больших амплитуд воздействия резонансные области становятся малыми, а основную часть фазового пространства консервативной системы занимает хаотическое море. Можно ожидать, что включение диссипации в этом случае не изменит хаотической природы колебаний, хотя приведет к ограничению множества фазовых траекторий, доступных для посещения в установившемся режиме. Возникнет *странный хаотический аттрактор*.

Перейдем к конкретным примерам и компьютерным иллюстрациям.

Задавшись определенным набором параметров осциллятора и начальными условиями, производим численное решение дифференциального уравнения (15.13) или (15.14) конечно-разностным методом в течение достаточно большого времени, чтобы обеспечить выход на аттрактор. После этого начинаем откладывать получаемые в процессе решения значения переменной x и ее производной на графике. В результате получается изображение проекции аттрактора из трехмерного фазового пространства нашей неавтономной системы на плоскость (x, \dot{x}) .

На рис. 15.10 показаны построенные с помощью компьютера аттракторы, отвечающие периодическим вынужденным колебаниям маятника при достаточно большом параметре диссипации $\gamma=0.1$. В области малых амплитуд воздействия наблюдается единственный аттрактор в виде замкнутой орбиты, обладающий очевидной симметрией (рис. 15.10а). Симметрия связана с тем, что уравнение (15.14) переходит в себя при замене $(x \rightarrow -x, t \rightarrow t + \pi/\Omega)$. При больших амплитудах удается обнаружить несколько сосуществующих аттракторов (рис. 15.10б). Два аттрактора изображаются замкнутой кривой и отвечают, очевидно, колебательному движению маятника, а два других – ротационному. Каждый из аттракторов в отдельности симметрией не обладает, но зато имеет симметричного партнера.

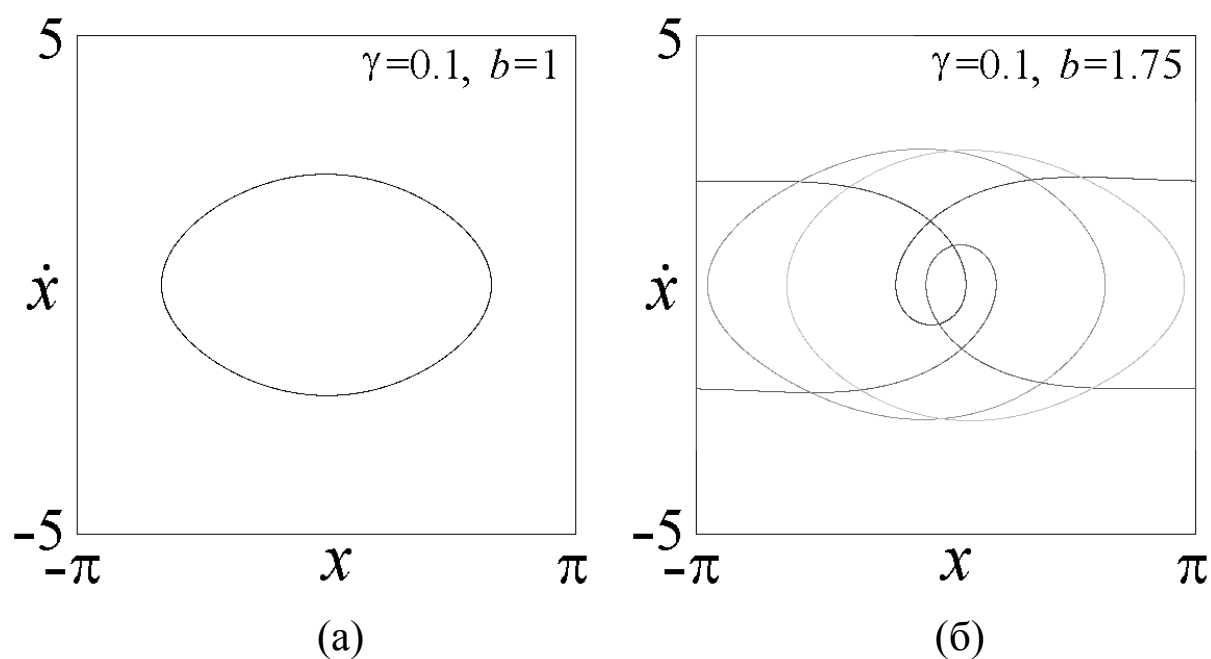


Рис. 15.10. Аттракторы, отвечающие периодическим вынужденным колебаниям маятника с диссипацией (15.14) при $\Omega=1$: (а) симметричный аттрактор, (б) четыре сосуществующих несимметричных аттрактора (показаны разными тонами серого).

С ростом амплитуды воздействия динамика усложняется, реализуется переход к хаосу, и возникает странный аттрактор (рис. 15.11). На рисунке (а) показан фазовый портрет, полученный в установившемся режиме динамики в технике стробоскопического сечения Пуанкаре (так же, как это делалось в предыдущих параграфах для консервативного случая). Хорошо видна характерная для странных аттракторов сложная поперечная фрактальная структура. На рисунке (б) показана проекция того же аттрактора на плоскость (x, \dot{x}) . Как можно усмотреть из формы индивидуальных траекторий, различимых на рис. 15.11б, движение маятника носит то колебательный то ротационный характер, так же как динамика консервативной системы в области хаотического моря.

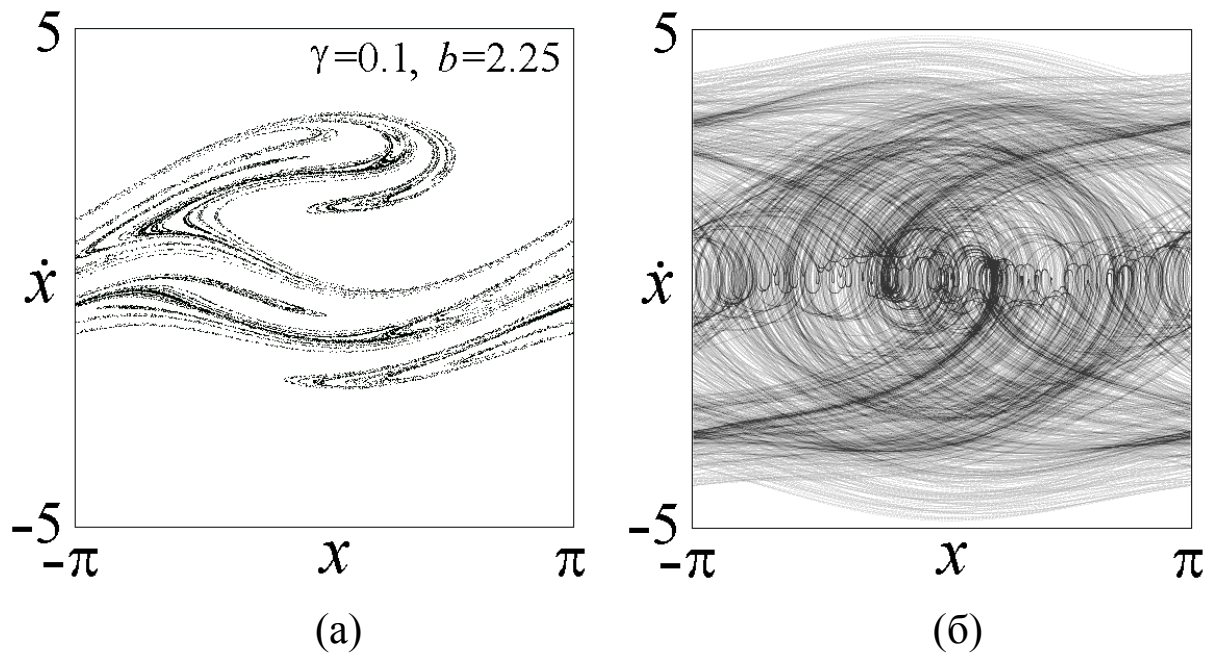


Рис. 15.11. Аттрактор, отвечающий хаотическим периодическим вынужденным колебаниям маятника при $\Omega=1$: (а) портрет в стробоскопическом сечении Пуанкаре, (б) проекция из трехмерного фазового пространства (x, \dot{x}, t) на плоскость (x, \dot{x}) .

На рис. 15.12 представлены портреты аттракторов, соответствующих вынужденным колебаниям диссипативного осциллятора Дуффинга. Они иллюстрируют наблюдаемое в этой системе последовательное усложнение динамики при увеличении амплитуды воздействия. При малой амплитуде реализуется аттрактор в виде симметричной замкнутой кривой (рис. 15.12а). Как и для маятника, симметрия связана с тем, что уравнение (15.13) переходит в себя при замене $(x \rightarrow -x, t \rightarrow t + \pi/\Omega)$. При увеличении амплитуды наблюдается бифуркация потери симметрии, в результате чего возникает аттрактор, показанный на рис. 15.12б. Одновременно рождается и его симметричный партнер – аттрактор того же типа, который связан с исходным аттрактором указанной выше заменой переменных. Период колебаний пока что остается равным периоду воздействия $T = 2\pi/\Omega$. Далее, несимметричный аттрактор претерпевает последовательность *бифуркаций удвоения*: период вынужденных колебаний становится сначала в два раза больше периода воздействия, потом в четыре, восемь раз, и так далее. На рис. 15.12в,г показаны портреты аттракторов, отвечающих периоду $2T$ и $4T$. Последовательность бифуркаций удвоения периода завершается переходом к хаосу. На рис. 15.12д можно видеть уже странный аттрактор. Он несимметричен, так что с ним сосуществует другой аттрактор такой же природы, являющийся его симметричным партнером. При дальнейшем увеличении амплитуды воздействия наступает ситуация,

когда траектория начинает посещать области обоих аттракторов, иными словами происходит их объединение в единый, симметричный странный аттрактор (рис. 15.12е).

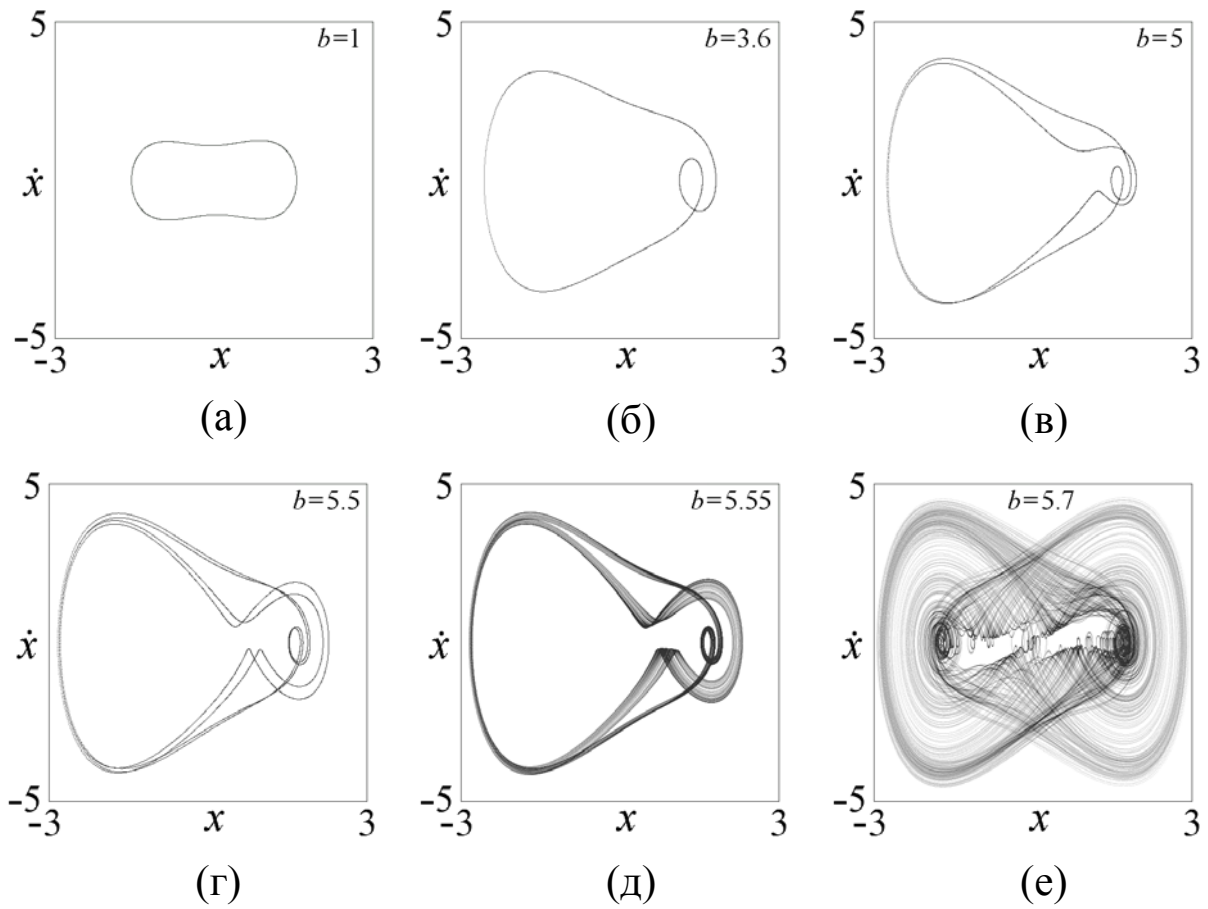


Рис. 15.12. Регулярные аттракторы, отвечающие вынужденным колебаниям осциллятора Дуффинга (15.13) (а)-(г) и странные хаотические аттракторы (д)-(е). Параметр диссипации и частота воздействия, соответственно $\gamma=0.1$ и $\Omega=1$.