

Часть IV

Неавтономные системы

Вынужденные колебания нелинейного осциллятора

Предположим, что мы изучили в подробностях некоторую автономную колебательную систему, такую как линейный или нелинейный осциллятор, генератор Ван-дер-Поля, или какую-нибудь другую. На нее можно смотреть теперь как на отдельный элемент – строительный блок, или «кирпичик», для построения составных объектов, которые будут служить моделями более сложных колебательных систем. Например, мы можем обратиться к задачам о воздействии одной колебательной системы на другую, к рассмотрению динамики связанных систем, к анализу моделей пространственно-протяженных сред, построенных из большого числа связанных элементарных блоков, и так далее. Это одна из глубоких общих идей в теории колебаний. Некоторые аспекты такого подхода обсуждаются в других курсах данного цикла – по теории волн, образованию структур, самоорганизации, динамическому хаосу. Хотя сколько-нибудь полное изложение соответствующей исследовательской программы выходит за рамки нашего курса лекций, мы сделаем здесь существенный для нее первый шаг, а именно, рассмотрим особенности поведения простых нелинейных систем в присутствии периодического внешнего воздействия.

О моделях неавтономных систем, фазовом пространстве и стробоскопическом отображении

Рассмотрим пример механического осциллятора – шарика на пружине, на который действует внешняя сила, изменяющаяся во времени по синусоидальному закону. Дифференциальное уравнение, вытекающее из второго закона Ньютона, можно записать в виде

$$m\ddot{x} + f(x) = F \sin \omega t, \quad (14.1)$$

где m — масса шарика, функция $f(x)$ характеризует пружину и определяет зависимость возвращающей силы от смещения, F и ω задают, соответственно, амплитуду и частоту внешней силы, воздействующей на осциллятор. Другой вариант – параметрическое воздействие, когда внешняя сила заставляет изменяться периодически какой-либо параметр колебательной системы, например, длину нити маятника или величину ускорения силы тяжести (маятник с колеблющимся в вертикальном направлении под-

весом). Дифференциальное уравнение, описывающее динамику такого маятника при соответствующем задании закона изменения параметра во времени, будет иметь вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}(1 + a \sin \omega t) \sin \varphi = 0 \quad (14.2)$$

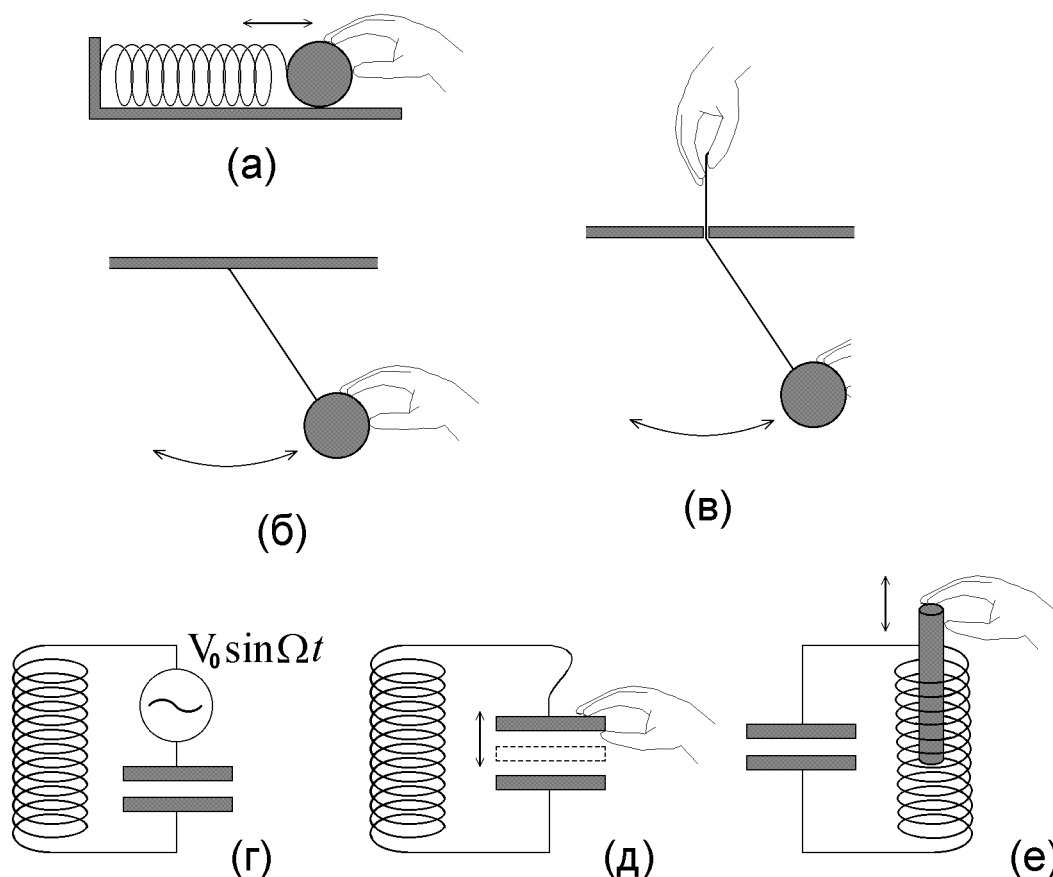


Рис. 14.1. Возбуждаемые внешним воздействием механические (а, б, в) и электрические (г, д, е) осцилляторы: «силовое» (а, б, г) и параметрическое (в, д, е)

Аналогичные два способа внешнего воздействия можно реализовать и в осцилляторах другой физической природы, например, электрических. Если в колебательный контур включить источник переменного напряжения, реализуется способ возбуждения аналогичный силовому возбуждению механической системы (14.1). Если же периодически менять емкость конденсатора (сдвигая и раздвигая пластины) или индуктивность (вдвигая и выдвигая сердечник), то это отвечает параметрическому возбуждению.

На практике параметрическое возбуждение осцилляторов в электро- и радиотехнике предпочтительнее реализовать без привлечения механически движущихся элементов. Например, можно поместить в конденсатор в качестве диэлектрика нелинейную среду и подать дополнительное переменное напряже-

ние на пластины. Этим будет обеспечено периодическое изменение емкости. Другая возможность состоит в том, чтобы использовать в катушке индуктивности сердечник с нелинейным намагничиванием и подать переменный ток в дополнительную обмотку. В этом случае будет периодически изменяться индуктивность.

Если в отсутствие зависящего от времени воздействия мы имеем автономную колебательную систему с двумерным фазовым пространством, то при добавлении периодического внешнего воздействия динамика такой системы в общем случае будет описываться системой двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x} = f(x, y, t), \quad \dot{y} = g(x, y, t), \quad (14.3)$$

где x и y – динамические переменные. Функции f и g считаются зависящими от времени t по периодическому закону. При надлежащем выборе функций f и g такая модель позволяет рассматривать различные осцилляторы, в том числе автоколебательные модели типа уравнения Ван-дер-Поля, Рэля, генератора с жестким возбуждением с внешним периодическим воздействием. Заметим, что при столь общей постановке задачи проведение различия между силовым и параметрическим воздействием может терять смысл.

Уравнения (14.3) описывают *неавтономную систему*. Этот термин означает, что в дифференциальных уравнениях присутствуют члены, явным образом зависящие от времени. Имея дело с такими системами, мы должны вполне определенным образом трактовать понятия фазового пространства и состояния колебательной системы. Для однозначного предсказания последующей динамики системы недостаточно просто задать значения переменных x и y , нужно еще указать к какому моменту времени в пределах периода внешнего воздействия они относятся. Поэтому состояние колебательной системы (14.3) определяется набором *трех* величин, (x, y, t) . Множество всевозможных состояний есть фазовое пространство системы, и это пространство в данном случае *трехмерное*.

К такому же выводу можно прийти сугубо формальным путем. Представим систему уравнений (14.3) как автономную с помощью искусственного приема. Для этого введем дополнительную динамическую переменную z , удовлетворяющую уравнению $\dot{z} = 1$, и запишем

$$\dot{x} = f(x, y, z), \quad \dot{y} = g(x, y, z), \quad \dot{z} = 1. \quad (14.4)$$

Полученная система трех уравнений первого порядка автономная, и она формально эквивалентна (14.3). Ее фазовое пространство (x, y, z) трехмерное. Динамика третьей переменной z состоит в том, что она линейно нарастает во времени, так что ее можно просто отождествить с t .

В силу периодичности функций f и g по третьему аргументу, трехмерное фазовое пространство обладает структурой, периодически повторяющейся вдоль третьей координатной оси (времени). Поэтому можно ограничиться рассмотрением части пространства между плоскостями $t=0$ и $t=T$, где T – период. Верхнюю и нижнюю границы можно отождествить. Считается, что при пересечении верхней границы фазовая траектория мгновенно «перепрыгивает» на нижнюю, в точку с теми же координатами (x,y) .

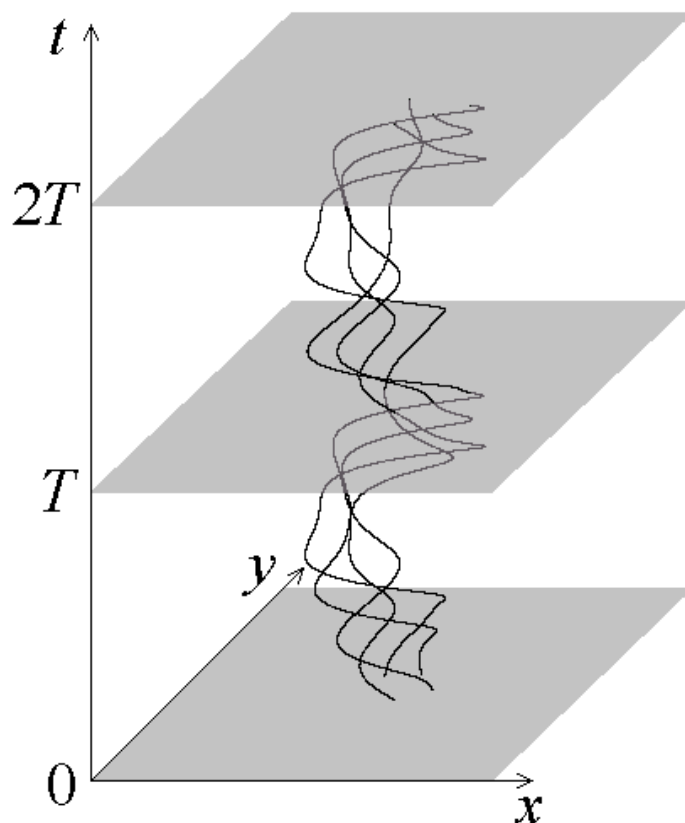


Рис. 14.2. Трехмерное фазовое пространство неавтономного осциллятора.

Полезный подход к анализу динамики неавтономных осцилляторов состоит в использовании так называемого *стробоскопического отображения*. Представьте себе, что динамика изображающей точки в фазовом пространстве системы большую часть времени протекает в темноте и недоступна для наблюдения. Однако один раз за период внешнего воздействия T на короткий миг вспыхивает яркий свет, так что мы можем отслеживать дискретную последовательность состояний, отвечающую моментам вспышек.

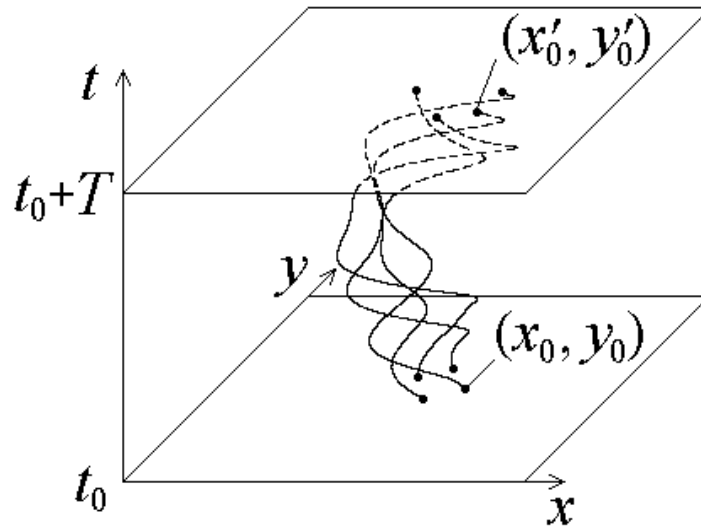


Рис. 14.3. Построение стробоскопического отображения.

Формально процедура состоит в следующем. Выделим в трехмерном фазовом пространстве (x, y, t) плоскость $t=t_0$ (рис. 14.3). В качестве координат на этой плоскости можно использовать естественные динамические переменные нашей системы, x и y . Возьмем фазовую траекторию, стартующую из некоторой точки (x, y) на данной плоскости и отследим ее до момента времени $t=t_0+T$. Пусть в этот момент значения динамических переменных составят x' и y' . Они, очевидно, зависят от выбора начальных x и y :

$$x' = F_1(x, y), \quad y' = F_2(x, y). \quad (14.5)$$

В силу периодичности фазового пространства по переменной t , мы можем отнести новую точку (x', y') к исходному моменту времени $t=t_0$ и тем самым свести анализ дальнейшей динамики к повторению той же самой процедуры, с теми же функциями F_1 и F_2 . Таким образом, описание динамики сводится к последовательным итерациям *двумерного отображения* (14.5).

В принципе, мы можем отвлечься от исходных дифференциальных уравнений и сосредоточиться на анализе динамики в дискретном времени, порождаемой стробоскопическим отображением (14.5). Эта подмена объекта исследования не связана с какими-либо аппроксимациями, анализ остается точным. Цена, которую приходится заплатить, – это потеря информации о характере динамики в промежутки времени между последовательными моментами пересечениями секущей поверхности и о топологических свойствах фазовых траекторий между пересечениями. Тем не менее, многие прин-

ципиальные вопросы по-прежнему можно анализировать, например, устанавливается ли в системе периодический или непериодический колебательный режим.

Найти явный вид стробоскопического отображения для конкретных нелинейных систем удастся лишь в тех случаях, когда дифференциальные уравнения допускают аналитическое решение. Гораздо чаще приходится реализовать его как численный алгоритм. Тем не менее, стробоскопическое отображение оказывается очень продуктивным при теоретическом анализе, а также для наглядного представления компьютерных результатов в случае сложной динамики рассматриваемых систем.

Стробоскопическое отображение представляет собой частный случай более общей конструкции – *отображения Пуанкаре*, являющегося одним из основных рабочих инструментов в современной нелинейной динамике. Тот факт, что от описания в терминах дифференциальных уравнений можно перейти к описанию в терминах рекуррентных отображений, имеет большое методологическое значение. Отсюда следует, что оба класса динамических систем – с непрерывным и дискретным временем принципиально должны рассматриваться в едином контексте, в рамках общей системы представлений.

Нелинейный резонанс

Как известно, для линейного осциллятора характерен эффект *резонанса*. Когда частота воздействия близка к собственной частоте осциллятора, амплитуда колебаний оказывается большой. Действительно, решение уравнения для вынужденных колебаний линейного осциллятора

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t \quad (14.6)$$

можно искать в виде $x = A \cos \omega t$. Подстановка этого выражения в уравнение приводит к соотношению

$$|A| = \frac{f}{|\omega^2 - \omega_0^2|}, \quad (14.7)$$

откуда следует, что при приближении частоты воздействия ω к собственной частоте ω_0 амплитуда колебаний стремится к бесконечности (если учитывать диссипацию, она оказывается ограниченной).

В случае нелинейного осциллятора частота свободных колебаний обычно зависит от амплитуды (неизохронность). Например, для кубического осциллятора

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0 \quad (14.8)$$

колебания малой амплитуды, которые еще можно приближенно считать гармоническими, $x = A \cos \omega t$, происходят на частоте, сдвинутой на величину $\Delta\omega(A) \approx 3\beta A^2 / 8\omega_0$ (см. лекцию 9).

В грубом приближении для описания вынужденных колебаний нелинейного осциллятора мы можем попытаться использовать то же самое соотношение (14.7), но вместо ω_0 подставить модифицированную частоту свободных колебаний $\omega_0 + \Delta\omega(A)$. В результате получается *невяное* соотношение, связывающее амплитуду вынужденных колебаний A с частотой ω и амплитудой f внешнего воздействия:

$$|A| = \frac{f}{\left| \omega^2 - (\omega_0 + \Delta\omega)^2 \right|} \approx \frac{f}{\left| \omega^2 - \omega_0^2 - 3\beta A^2 \omega_0^2 / 4 \right|}. \quad (14.9)$$

На рис. 14.4 показаны графики зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты для линейного (а) и нелинейного (б, в) осциллятора. Обратим внимание на разное расположение резонансной кривой осциллятора с кубической нелинейностью при положительном и отрицательном значении параметра нелинейности β . Если частота свободных колебаний возрастает с ростом амплитуды (при $\beta > 0$), то верхняя часть графика резонансной кривой наклонена вправо, если же убывает (при $\beta < 0$), то влево.

Следует отметить, что в отличие от линейного случая амплитуда вынужденных колебаний остается конечной даже при точном совпадении ω и ω_0 . Причина, очевидно, заключается в неизохронности собственных колебаний нелинейного осциллятора: с ростом амплитуды увеличивается нелинейный сдвиг частоты и резонансные условия нарушаются. Вследствие этого нарастание амплитуды ограничивается.

Совокупность явлений, которые наблюдаются в нелинейном осцилляторе при внешнем периодическом воздействии и проявляются в изменении качественной природы и количественных характеристик вынужденных колебаний в зависимости от амплитуды и частоты воздействия, обозначают термином *нелинейный резонанс*. Важно подчеркнуть, что зависимость амплитуды от частоты, как видно из рис. 14.4, может быть

неоднозначной. Это очень существенный и характерный для нелинейного резонанса момент, который будет подробнее обсужден в ходе дальнейшего изложения.

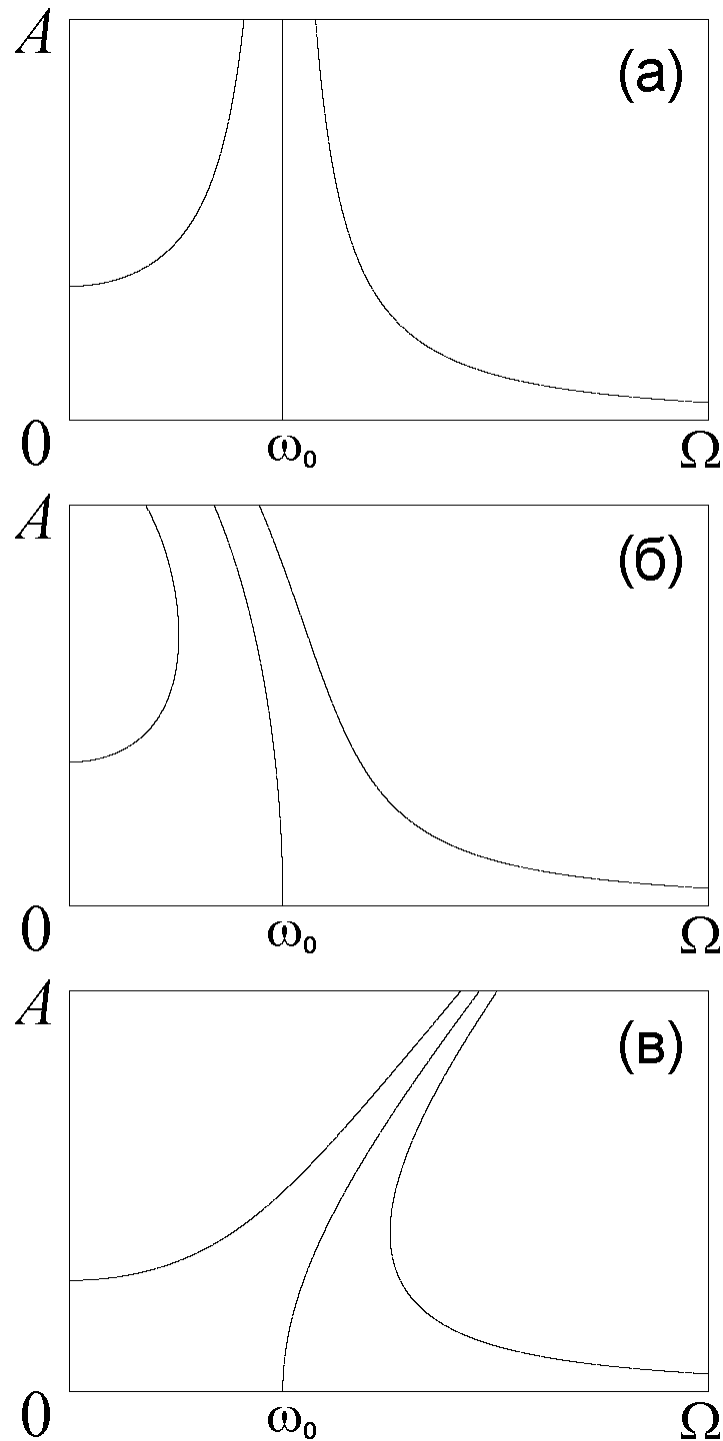


Рис. 14.4. Резонансные кривые – зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты воздействия в линейном осцилляторе (а) и в нелинейном осцилляторе с кубической нелинейностью при $\beta < 0$ (б) и $\beta > 0$ (в) в отсутствие диссипации.

Резонансные кривые для консервативного осциллятора можно встретить в многочисленных учебных курсах по теории колебаний. Правильная их интерпретация со-

держит определенную тонкость, что не всегда должным образом подчеркивается. Дело в том, что консервативный осциллятор (как линейный, так и нелинейный) обладает свойством сохранять «память» о своем начальном состоянии на протяжении неограниченного времени. Поэтому в общем случае движение будет содержать зависящую от начальных условий составляющую, отвечающую за «собственные» колебания осциллятора с некоторой характерной частотой и амплитудой, и составляющую, отвечающую за вынужденные колебания, период которой определяется периодом воздействия (в нелинейной системе принцип суперпозиции не работает, поэтому, говоря о наличии двух составляющих колебательного процесса, мы имеем в виду не их сумму, а некую более сложную комбинацию). Если частоты обеих составляющих находятся в рациональном отношении, то движение будет периодическим, но это скорее исключительный случай. Если же частоты несоизмеримы, то движение оказывается *квазипериодическим*. Только лишь при определенном выборе начальных условий, исключающим «собственную» колебательную составляющую, реализуются «в чистом виде» вынужденные колебания, которым соответствует амплитуда, представленная на рис.14.4.

Можно, однако, предложить и другой подход к трактовке резонансных кривых на рис.14.4. Представим себе, что наш осциллятор на самом деле диссипативный, но диссипация исчезающе мала (характеризуется параметром $\gamma \ll 1$). Тем не менее, если время наблюдения достаточно велико, $T \gg \gamma^{-1}$, то диссипация будет существенной и обеспечит установление не зависящего от начальных условий режима вынужденных колебаний. Зависимость амплитуды колебаний от частоты воздействия в установившемся режиме будет приближенно описываться резонансными кривыми, построенными для консервативного осциллятора, с тем большей точностью, чем меньше параметр диссипации α .

Нелинейный резонанс в осцилляторе с диссипацией. Укороченные уравнения и резонансные кривые

Обратимся теперь к более аккуратному анализу нелинейного резонанса в осцилляторе с кубической нелинейностью при учете диссипации и рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -2\gamma\dot{x} - \beta x^3 + f \cos \omega t, \quad (14.10)$$

причем будем считать, что частота внешнего воздействия близка к собственной частоте осциллятора, $\omega = \omega_0 + \delta$, где *расстройка* частот δ мала. Члены, фигурирующие в пра-

вой части, отвечают за диссипацию, нелинейность и внешнее воздействие. Если ими пренебречь, система превращается в гармонический осциллятор. Если же они малы, то решение целесообразно искать в виде квазигармонического колебания с медленно меняющейся амплитудой, для которой можно получить укороченное уравнение при помощи асимптотических методов, описанных в лекции 9.

Используем метод усреднения Ван-дер-Поля. Подставим в уравнение (14.10) $x(t)$ в виде

$$x(t) = \operatorname{Re} [A(t) e^{i\omega_0 t}], \quad (14.11)$$

где на медленно меняющуюся комплексную амплитуду A , как обычно, накладывается дополнительное условие

$$\dot{A} e^{i\omega_0 t} + \dot{A}^* e^{-i\omega_0 t} = 0. \quad (14.12)$$

Представим член, ответственный за внешнее воздействие, в виде

$$f \cos \omega t = \operatorname{Re} f e^{i\omega t} = \frac{f e^{i\omega t} + f^* e^{-i\omega t}}{2}. \quad (14.13)$$

Подставляя (14.11)–(14.13) в (14.10), после несложных преобразований, которые подробно были описаны в лекции 9, получим

$$i\omega_0 \dot{A} e^{i\omega_0 t} = -i\omega_0 \gamma A e^{i\omega_0 t} - i\omega_0 \gamma A^* e^{-i\omega_0 t} + \beta \left(\frac{1}{8} A^3 e^{3i\omega_0 t} + \frac{3}{8} |A|^2 A e^{i\omega_0 t} + \frac{3}{8} |A|^2 A^* e^{-i\omega_0 t} + \frac{1}{8} (A^*)^3 e^{-3i\omega_0 t} \right) + \frac{1}{2} f e^{i\omega t} + \frac{1}{2} f^* e^{-i\omega t}. \quad (14.14)$$

Умножим обе части уравнения (14.14) на $e^{-i\omega_0 t}/i\omega_0$ и проведем усреднение за период колебаний $2\pi/\omega_0$. Считаем, что на этом масштабе времени изменением комплексных амплитуд можно пренебречь. Кроме того поскольку мы рассматриваем случай, когда частоты ω и ω_0 близки, то член, содержащий экспоненту $\exp[i(\omega - \omega_0)t] = \exp[i\delta t]$, также будет медленно меняющимся. Тогда после устранения быстро осциллирующих членов приходим к укороченному уравнению

$$\dot{A} = -\gamma A - \frac{3i\beta}{8\omega_0} |A|^2 A - \frac{if}{2\omega_0} e^{i\delta t}. \quad (14.15)$$

В отсутствие внешнего воздействия, когда $f = 0$, уравнение (14.15) переходит в укороченное уравнение для автономного осциллятора Дуффинга, которое неоднократно рассматривалось в лекции 9.

Перейдем к уравнениям для вещественных амплитуды и фазы. Полагая $A = a \exp(i\varphi)$, отделим в (14.15) вещественную и мнимую части. Получим

$$\begin{aligned}\dot{a} + \gamma a &= \frac{f}{2\omega_0} \sin(\delta t - \varphi), \\ \dot{\varphi} &= \frac{3\beta a^2}{8\omega_0} - \frac{f}{2a\omega_0} \cos(\delta t - \varphi).\end{aligned}\tag{14.16}$$

Система уравнений (14.16) является неавтономной, так как содержит члены, зависящие явным образом от времени. Однако, вводя величину $\psi = \delta t - \varphi$ можно получить автономную систему вида

$$\begin{aligned}\dot{a} + \gamma a &= \frac{f}{2\omega_0} \sin \psi, \\ \dot{\psi} &= \delta - \frac{3\beta a^2}{8\omega_0} + \frac{f}{2a\omega_0} \cos \psi.\end{aligned}\tag{14.17}$$

Естественно ожидать, что в установившемся режиме вынужденных колебаний амплитуда постоянна, а частота равна частоте внешнего воздействия. Этому режиму соответствуют положения равновесия системы (14.17): $a = a_0$, $\psi = \psi_0$, $a_0, \psi_0 = \text{const}$.

Действительно, нетрудно убедиться, что в этом случае

$$\begin{aligned}A(t) &= a \exp(i\varphi) = a_0 \exp[i(\delta t - \psi_0)], \\ x(t) &= \text{Re}(Ae^{i\omega_0 t}) = a_0 \cos(\omega t - \psi_0),\end{aligned}\tag{14.18}$$

т.е. колебания происходят точно на частоте воздействия. Для определения положений равновесия получаем из (14.17) следующие уравнения

$$\begin{aligned}\gamma a_0 &= \frac{f}{2\omega_0} \sin \psi_0, \\ \left(\delta - \frac{3a_0^2}{8\omega_0}\right) a_0 &= -\frac{f}{2\omega_0} \cos \psi_0.\end{aligned}\tag{14.19}$$

Удобно исключить отсюда ψ_0 . Возводя уравнения (14.19) в квадрат и складывая, получаем соотношение, которое неявным образом определяет амплитуду колебаний a_0 как функцию амплитуды и частоты вынуждающей силы

$$(\gamma a_0)^2 + a_0^2 \left(\delta - \frac{3\beta a_0^2}{8\omega_0} \right)^2 = \frac{f^2}{4\omega_0^2}. \quad (14.20)$$

Соотношение (14.20) называется *уравнением резонансной кривой*.

Если устремить параметр диссипации γ к нулю, то (14.20) можно переписать в следующей форме

$$a_0 = \frac{f}{\left| 2\omega_0\delta - 3\beta a_0^2/4 \right|}, \quad (14.20)$$

которая согласуется с выражением (14.9). В самом деле, ввиду близости частот ω_0 и ω справедливо приближенное соотношение $\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) \approx 2\omega_0\delta$.

Мы хотели бы детально проанализировать соотношение (14.20), описывающее нелинейный резонанс в присутствии диссипации. Для этого преобразуем его к более удобной форме, минимизируя количество переменных и параметров. Для определенности далее будем считать параметр нелинейности β положительным.

Введем следующие обозначения: $P = (3\beta f^2)/(32\gamma^3\omega_0^3)$ – безразмерный параметр, характеризующий интенсивность внешнего воздействия, $X = (3\beta a_0^2)/(8\gamma\omega_0)$ – безразмерный параметр, характеризующий интенсивность вынужденных колебаний, $\Delta = \delta/\gamma$ – безразмерная расстройка частоты. Тогда соотношение (14.20) принимает вид

$$X = \frac{P}{(X - \Delta)^2 + 1}, \quad (14.21)$$

Придавая различные значения параметру интенсивности воздействия P , мы можем построить семейство кривых $X = X(\Delta)$, представляющих собой резонансные кривые нелинейного осциллятора в безразмерных координатах X и Δ (рис. 14.5).

Если внешнее воздействие мало, т.е. $P \ll 1$, то амплитуда вынужденных колебаний тоже мала (X порядка P), и формула (14.21) приближенно приводится к виду

$$X = \frac{P}{\Delta^2 + 1}. \quad (14.22)$$

Соответствующий график имеет вид колоколообразной кривой, характерной для линейного резонанса и известной как «лоренцевский контур». С ростом параметра P амплитуда растет, поправка X в знаменателе формулы (14.21) становится существенной, верхняя часть резонансной кривой постепенно отклоняется вправо, и кривая становится все более асимметричной. Обратим внимание, что максимумы резонансных кривых $X = P$ достигаются при $X = \Delta$, т.е. при

$$\delta = \frac{3\beta a_0^2}{8\omega_0} = \Delta\omega(a_0). \quad (14.23)$$

Следовательно, при заданной амплитуде внешней силы амплитуда вынужденных колебаний будет максимальна, когда расстройка в точности равна нелинейному сдвигу частоты свободных колебаний автономного осциллятора.

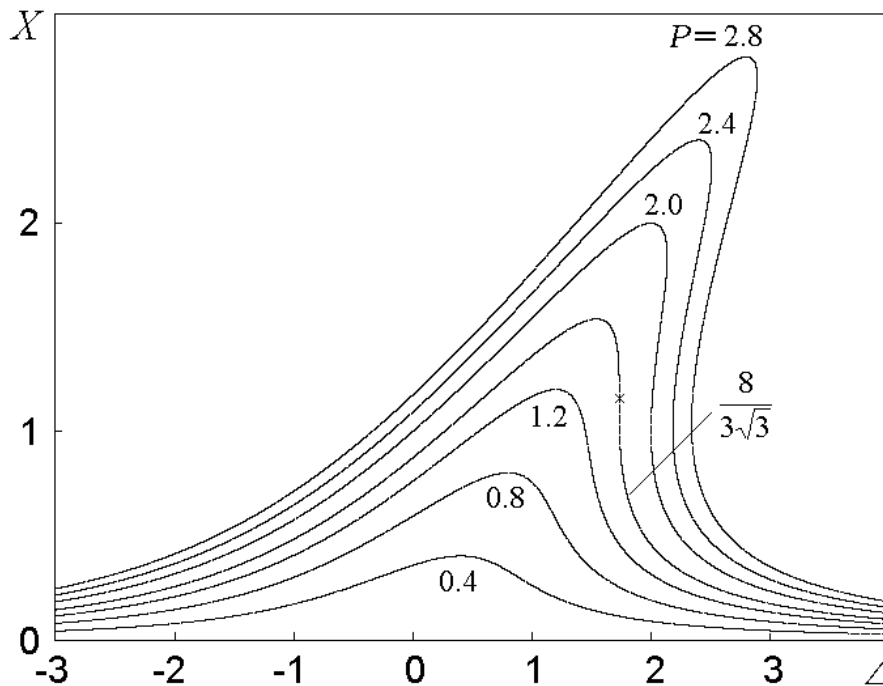


Рис. 14.5. Семейство резонансных кривых нелинейного осциллятора с диссипацией. Каждая кривая показывает зависимость параметра интенсивности вынужденных колебаний X от безразмерной расстройки Δ при фиксированной величине амплитуды воздействия, заданной параметром P , см. формулу (14.21). Крестиком показана точка, отвечающая моменту первого появления вертикальной касательной ($P = 8/3\sqrt{3}$, $\Delta = \sqrt{3}$, $X = 2/\sqrt{3}$).

При достаточно больших амплитудах зависимость амплитуды колебаний от расстройки становится неоднозначной. В рассматриваемом случае, когда параметр нелинейности β положителен, область неоднозначности располагается при частотах воздействия несколько больших частоты линейного резонанса ($\Delta > 0$, т.е. $\omega > \omega_0$). В этой об-

ласти одной частоте воздействия отвечает *три* возможных значения амплитуды. Причина появления этой неоднозначности и связанные с ней явления заслуживают специального обсуждения.

Задача 14.1. Найдите критическое (минимальное) значение безразмерной амплитуды воздействия P в формуле (14.21), начиная с которого резонансные кривые становятся неоднозначными.

Задача 14.2. Получите укороченные уравнения для линейного осциллятора с затуханием под внешним гармоническим воздействием

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t$$

и постройте резонансные кривые. Сравните полученный результат с известными из курса линейных колебаний точными решениями.

Задача 14.3. Получите укороченное уравнение (14.15) при помощи метода многих масштабов для неавтономного осциллятора Дуффинга

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\gamma\dot{x} + x + \varepsilon x^3 = \varepsilon f \cos \omega t,$$

где $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр. Частоту внешнего воздействия считайте близкой к собственной частоте малых колебаний автономного осциллятора, т.е. $\omega = 1 + \varepsilon\delta$.

Задача 14.3. Получите укороченное уравнение и постройте резонансные кривые для осциллятора с квадратичной нелинейностью под внешним гармоническим воздействием

$$\ddot{x} + 2\varepsilon^2\gamma\dot{x} + x + \varepsilon x^2 = \varepsilon^2 f \cos \omega t,$$

при условии $\omega = 1 + \varepsilon^2\delta$. Поскольку в данном случае нелинейная поправка к частоте имеет порядок ε^2 (см. лекцию 9), параметр диссипации, амплитуда внешнего воздействия и расстройка также должны иметь порядок ε^2 .

Бифуркации при нелинейном резонансе

Прежде всего исследуем резонансную кривую на устойчивость. Зададим малые отклонения от состояний равновесия, полагая $a(t) = a_0 + \xi(t)$, $\psi(t) = \psi_0 + \eta(t)$, и линеаризуем уравнения (14.17). Получим

$$\begin{aligned} \dot{\xi} + \gamma\xi &= \frac{f\eta}{2\omega_0} \cos \psi_0, \\ a_0\dot{\eta} &= \delta\xi - \frac{9\beta a_0^2\xi}{8\omega_0} - \frac{f\eta}{2\omega_0} \sin \psi_0. \end{aligned} \tag{14.24}$$

Исключим отсюда ψ_0 при помощи соотношений (14.19):

$$\begin{aligned}\dot{\xi} + \gamma\xi &= -\left(\delta a_0 - \frac{3\beta a_0^3}{8\omega_0}\right)\eta, \\ a_0\dot{\eta} &= \left(\delta - \frac{9\beta a_0^2}{8\omega_0}\right)\xi - \gamma a_0\eta.\end{aligned}\tag{14.25}$$

Полагая, что решения (14.25) имеют вид $\xi, \eta \sim \exp(pt)$, приходим к характеристическому уравнению, которое после несложных преобразований можно записать в виде

$$(p + \gamma)^2 = -(\delta - \Delta\omega)(\delta - 3\Delta\omega),\tag{14.26}$$

где $\Delta\omega(a_0) = 3\beta a_0^2/8\omega_0$ — нелинейный сдвиг частоты собственных колебаний осциллятора. Корни уравнения (14.26) есть

$$p_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{-(\delta - \Delta\omega)(\delta - 3\Delta\omega)}.\tag{14.27}$$

Нетрудно видеть, что при $\delta < \Delta\omega$ и при $\delta > 3\Delta\omega$ корни p_{\pm} комплексны, и состояние равновесия представляет собой устойчивый фокус. При $\Delta\omega < \delta < 3\Delta\omega$ корни вещественны. Поскольку корень p_- , очевидно, всегда отрицателен, состояние равновесия может быть либо устойчивым узлом, либо седлом. Смена характера устойчивости происходит при $p_+ = 0$, т.е. при

$$(\delta - \Delta\omega)(\delta - 3\Delta\omega) = -\gamma^2.\tag{14.28}$$

Переходя к безразмерным переменным, введенным в предыдущем разделе, можно переписать это уравнение в виде

$$(\Delta - X)(\Delta - 3X) = -1.\tag{14.29}$$

В то же время, если продифференцировать уравнение резонансной кривой (14.22) по X , получим следующее соотношение

$$(\Delta - X)^2 + 2X(\Delta - X)\left(\frac{\partial\Delta}{\partial X} - 1\right) + 1 = 0.\tag{14.30}$$

В области неоднозначности резонансная кривая имеет три ветви, границы между которыми определяются из условия $\partial\Delta/\partial X = 0$. Нетрудно показать, что при этом условии соотношение (14.30) принимает вид (14.29). Следовательно, вся промежуточная ветвь резонансной кривой отвечает неустойчивым состояниям равновесия, а верхняя и нижняя — устойчивым. На рис. 14.6 построена резонансная кривая, на которой неустойчивая ветвь обозначена пунктиром.

Теперь можно ответить на вопрос, как будет изменяться поведение системы при плавном изменении управляющих параметров, например, частоты воздействия. Предположим, что мы постепенно увеличиваем частоту, находясь первоначально вдали от резонанса. На резонансной кривой это отвечает движению вдоль левой ветви (рис. 14.6). Амплитуда колебаний увеличивается с ростом частоты. Вскоре после прохождения максимума происходит резкое изменение режима – *жесткий переход*, или *катастрофа*: амплитуда скачком уменьшается до некоторой небольшой величины. В результате мы оказываемся на правой ветви резонансной кривой. Если теперь уменьшать частоту воздействия, то мы двигаемся вдоль этой ветви (в том числе, в области частот, где ранее наблюдались колебания большой амплитуды). Амплитуда при этом постепенно растет, и в некоторый момент происходит новая катастрофа – скачкообразный переход в режим большой амплитуды, возвращение на левую ветвь резонансной кривой. Таким образом, изменение частоты воздействия при достаточно большой его амплитуде приводит к *гистерезису*.

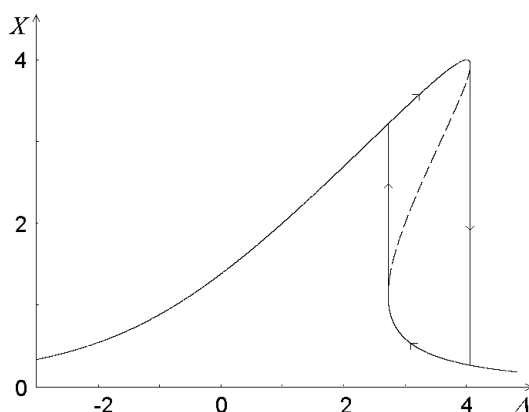


Рис. 14.6. Гистерезис при нелинейном резонансе. Стрелки показывают направление движения вдоль резонансной кривой при медленном изменении частоты воздействия (см. текст).

Причину появления неоднозначности можно качественно пояснить следующим образом. При наличии определенной отстройки по частоте, когда условия линейного резонанса не выполнены (рис. 14.7а), осциллятор будет совершать вынужденные колебания некоторой сравнительно небольшой амплитуды a_1 . Предположим теперь, что воздействующая на осциллятор внешняя сила такая же, но амплитуда колебаний изначально велика. Их частота оказывается иной, чем в линейном случае, и близка к частоте воздействия (рис. 14.7б). Внешняя сила в этом случае будет подталкивать осциллятор в такт совершаемым колебаниям, и их амплитуда может поддерживаться на исходном уровне a_3 . Промежуточное значение амплитуды a_2 отвечает неустойчивому состоя-

нию: чуть-чуть уменьшив или чуть-чуть увеличив амплитуду колебаний, мы обнаружим, что осциллятор после переходного процесса окажется в состоянии a_1 или a_3 .

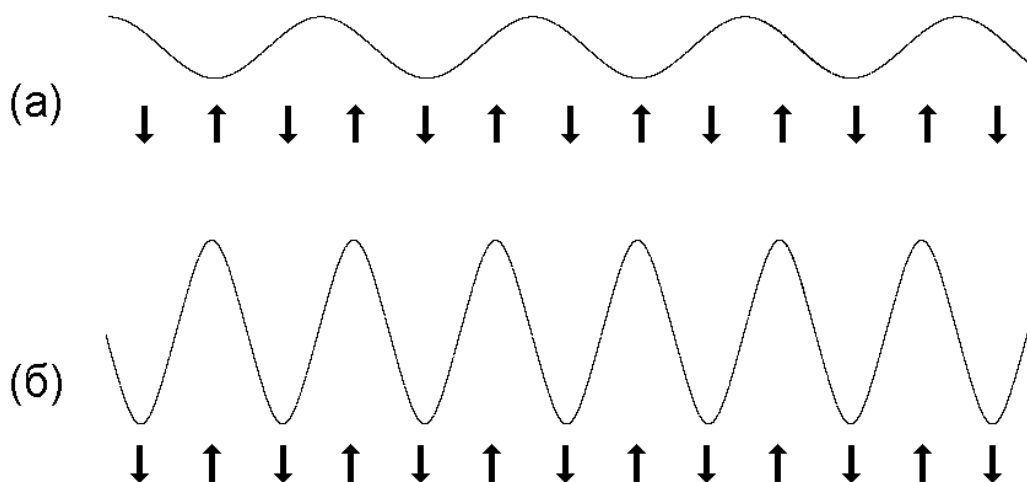


Рис.14.7. Внешнее воздействие определенной частоты на нелинейный осциллятор, совершающий колебания малой (а) и большой (б) амплитуды. В первом случае воздействие нерезонансное, во втором – резонансное.

Что представляет собой аттрактор в фазовом пространстве неавтономного диссипативного осциллятора, соответствующий установившемуся режиму периодических вынужденных колебаний? Это некоторая определенная, периодическая в направлении временной оси, фазовая траектория, к которой в пределе, с течением времени, приближаются все соседние траектории.

Если принять соглашение об отождествлении областей фазового пространства, сдвинутых на период по оси времени, то упомянутая притягивающая траектория будет замкнутой. Можно ли ее назвать притягивающим предельным циклом? По-видимому, правильнее зарезервировать это термин для автономных систем, имея в виду замкнутые фазовые траектории, которые служат математическим образом автоколебаний. Для траектории, представляющей вынужденные колебания лучше использовать нейтральный термин «притягивающая периодическая орбита».

Когда мы привлекаем для описания динамики стробоскопический метод, аттрактор представляется притягивающей неподвижной точкой соответствующего двумерного отображения.

Как мы увидим из дальнейшего изложения, в общем случае колебания нелинейного осциллятора при периодическом внешнем воздействии могут быть сложными, в том числе хаотическими. В последнем случае в трехмерном фазовом пространстве системы присутствует так называемый странный аттрактор – сложно устроенное притягивающее множество неустойчивых траекторий. Такая ситуация, впрочем, не встречается, если выполнены те предположения, при которых применим метод медленно меняющихся амплитуд. Действительно, действуя в рамках этого метода, мы свели задачу к уравнению (14.15), которая заменой переменной сводится к автономной системе (14.17) с двумерным фазовым про-

странством. А для двумерных систем с непрерывным временем хаос невозможен (см. книгу данного цикла «Динамический хаос»).

В области параметров, где реализуется гистерезис, нелинейный осциллятор демонстрирует бистабильность. Это соответствует наличию в фазовом пространстве двух сосуществующих аттракторов, один из которых отвечает вынужденным колебаниям малой, а второй – большой амплитуды. Возникновение одного или другого режима зависит от начальных условий. Множество точек фазового пространства, при запуске из которых траектория приходит к одному определенному аттрактору, называют бассейном этого аттрактора.

Рассмотрим полезный способ представления поведения системы на плоскости параметров. На рис. 14.8 показана соответствующая диаграмма, где по оси абсцисс отложена нормированная частота воздействия $\Delta = \delta/\gamma$, а по оси ординат — нормированная амплитуда воздействия $P = (3\beta f^2)/(32\gamma^3\omega_0^3)$. Картину можно мыслить как совокупность частично перекрывающихся листов, каждый из которых отвечает одному из корней уравнения (14.21). Область перекрытия листов есть область бистабильности. Она ограничена двумя *линиями складки*, которые сходятся вместе в определенной точке, называемой *точкой сборки*.

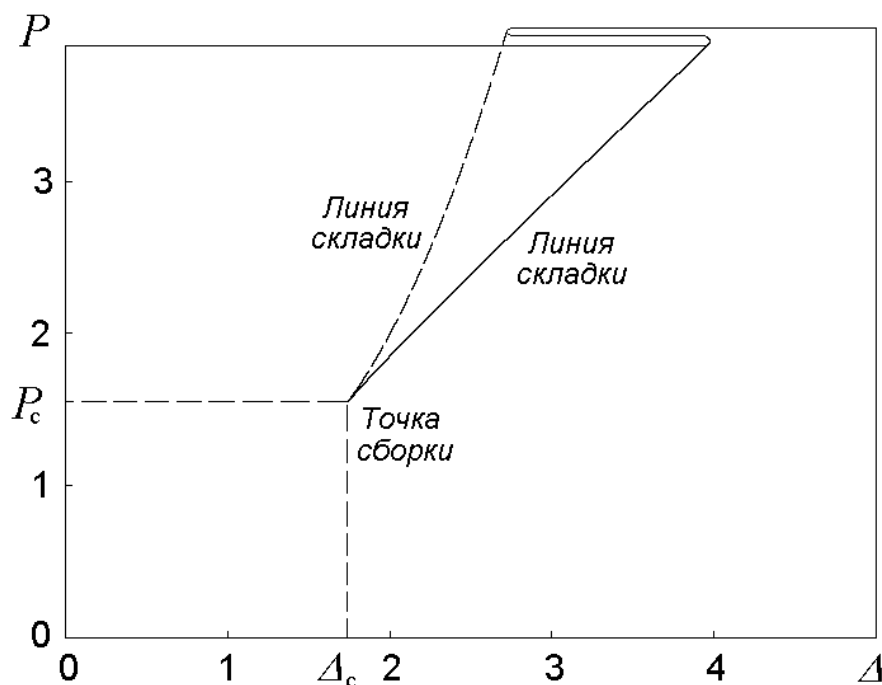


Рис. 14.8. Линии складок и точка сборки на плоскости параметров нелинейного диссипативного осциллятора.

Как найти аналитически линии складок и точку сборки? Первые, очевидно, можно определить из условия равенства нулю производной $\partial\Delta/\partial X$, что приводит к соотношению (14.29). Таким образом, на плоскости параметров (Δ, P) линии складок есть кривые, определяемые системой двух уравнений (14.21) и (14.29). Если, кроме того, потребовать обращения в нуль второй производной, $\partial^2\Delta/\partial X^2$, что дает

$$6X - 4\Delta = 0, \quad (14.31)$$

то система трех уравнений (14.21), (14.29) и (14.31) с тремя неизвестными (X , Δ , и P) определит положение точки сборки. Ее решение представляет собой несложную алгебраическую задачу и приводит к результату $X = 2/\sqrt{3}$, $\Delta = \sqrt{3}$, $P = 8/3\sqrt{3}$. Указанные величины Δ и P определяют координаты точки сборки на плоскости параметров.

Если двигаться на плоскости параметров вдоль горизонтальной линии $P = \text{const}$, то зависимость интенсивности колебаний от параметра расстройки Δ будет даваться одной из резонансных кривых семейства, представленного на рис.14.5. Если рассматриваемая горизонтальная линия проходит *ниже* точки сборки, то зависимость амплитуды от расстройки однозначная. Если же она проходит выше точки сборки, то появляется область неоднозначности, или гистерезиса. Она ограничена точками, где касательная к резонансной кривой вертикальна; это те самые точки, где линия $P = \text{const}$ пересекается с линиями складок. Момент первого появления вертикальной касательной к резонансной кривой отвечает точке сборки.

Если медленно изменять параметры системы так, что это соответствует обходу вокруг точки сборки, то при пересечении одной из линий складок будет наблюдаться скачкообразное изменение состояния («катастрофа»). При обходе по часовой стрелке это происходит на одной линии складок, а при обходе против часовой стрелки – на другой (рис. 14.9). (Выше мы обсуждали этот же эффект гистерезиса применительно к изменению одного параметра – частоты воздействия.)

Если рассуждать в терминах стробоскопического метода, то линия складок отвечает бифуркации, состоящей в слиянии устойчивой и неустойчивой неподвижных точек двумерного отображения. На языке динамических систем с непрерывным временем (дифференциальных уравнений) это бифуркация слияния устойчивой и неустойчивой периодических орбит. Бифуркационная ситуация достигается подстройкой *одного* параметра системы, как говорят, бифуркация имеет *коразмерность один*. Точка сборки отвечает *бифуркации коразмерности два* – для того, чтобы в нее попасть, нужно подобрать *два* параметра.

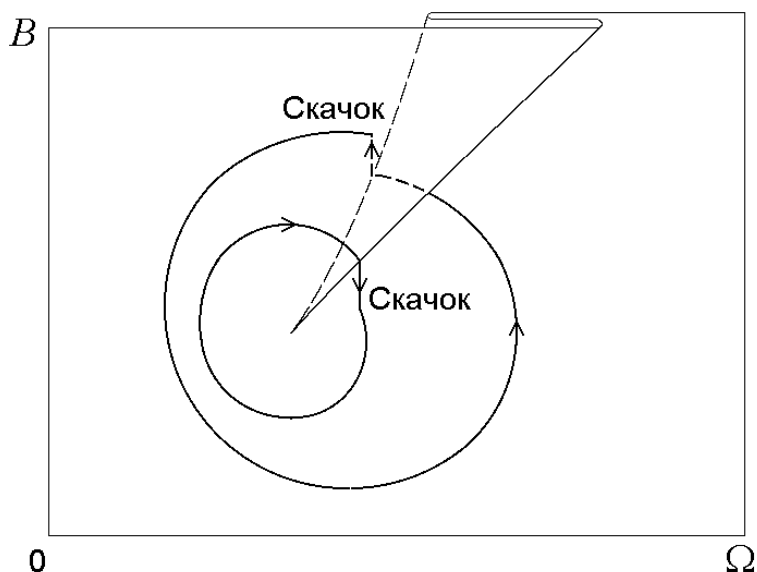


Рис. 14.9. К пояснению бифуркаций, наблюдаемых при обходе точки сборки в разных направлениях.

Нелинейный резонанс в численном эксперименте

Хотя рассмотренная выше картина явлений в диссипативном осцилляторе при нелинейном резонансе выглядит достаточно наглядной и убедительной, не стоит забывать, что мы пришли к ней, опираясь на метод медленно меняющихся амплитуд. В каких случаях, и в какой мере можно доверять результатам, полученным на основании приближенного метода?

Естественной кажется такая постановка вопроса: пусть мы имеем конкретный осциллятор, описываемый уравнениями (14.10), с заданными параметрами. Какой будет погрешность метода? Возможность дать обзримый и исчерпывающий ответ на этот вопрос кажется весьма сомнительной. В самом деле, погрешность описания динамики приближенным методом будет зависеть от такого же числа факторов, как и сама динамика. Дать полный ответ, по-видимому, не проще, чем предложить полное описание собственно динамики со всеми деталями! Разумен и заслуживает внимания следующий более изощренный подход. Спросим, можно ли указать такой предельный переход, когда, уменьшая некоторый параметр задачи, мы будем получать все более точное соответствие с истинным поведением системы, с тем условием, однако, чтобы картина поведения системы оставалась содержательной, сохраняя все назначенные для изучения феномены в процессе предельного перехода. Рассмотренная нами теория нелинейного резонанса хороша как раз тем, что обладает указанными свойствами. Поэтому ее следует, безусловно, признать правильной в том смысле, что всегда можно подобрать такое

соотношение параметров возбуждаемого нелинейного осциллятора, чтобы метод работал, притом с любой желаемой степенью точностью. Описание оказывается точным в *асимптотическом смысле* (почему и говорят об «асимптотических методах теории колебаний»).

Из сказанного совсем не следует, что теория охватывает все возможные варианты качественного поведения системы, и что результаты будут удовлетворительными при любом задании параметров. В действительности дело обстоит как раз наоборот. В частности, сложная хаотическая динамика, возможная в возбуждаемом периодической силой нелинейном осцилляторе, не находит описания в рамках рассмотренной теории. Но хаос и реализуется в той области параметров, где метод медленно меняющихся амплитуд заведомо не работает.

Чтобы составить представление о соотношении результатов анализа в рамках метода медленно меняющихся амплитуд и динамикой исходной системы (14.10), разумно обратиться к численному эксперименту, т.е. попытаться пронаблюдать характерные для нелинейного резонанса феномены посредством численного решения исходного дифференциального уравнения на компьютере и провести количественное сравнение с аналитическими результатами. Разумеется, выбор исходных параметров задачи должен быть произведен так, чтобы он явно не противоречил условиям применимости приближенного метода. В то же время, он должен захватить и ту область, где возникают заметные погрешности. Далее, следует продумать способ обработки и представления результатов в терминах переменных и параметров, отвечающих проведенному аналитическому рассмотрению с тем, чтобы сделать сопоставление наглядным и убедительным.

Стандартные методы численного решения формулируются обычно применительно к системам дифференциальных уравнений первого порядка. Наше исходное дифференциальное уравнение (14.10) можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= -\omega_0^2 x - 2\gamma\dot{x} - \beta x^3 + f \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (14.32)$$

Фаза внешнего воздействия φ не существенна с точки зрения характера реализующегося режима, и в дальнейшем мы без ограничения общности положим ее равной нулю.

Построение *разностной схемы* для численного решения подразумевает задание некоторого шага по времени и замену производных разностными соотношениями (кратко эти вопросы уже затрагивались в лекции 4). Конкретное конструирование раз-

ностных схем, обеспечивающих оптимальную точность при заданном шаге, составляет предмет специального раздела вычислительной математики, которому посвящена обширная литература. Здесь нас интересует принципиальная сторона вопроса, поэтому обратимся к несложной схеме второго порядка (это значит, что погрешность аппроксимации на одном шаге пропорциональна h^3). Вводим обозначение $x_n = x(t)|_{t=nh}$, $v_n = v(t)|_{t=nh}$ и полагаем

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + hv_{n+1/2}, \\ v_{n+1} &= v_n + h \left[-\omega_0^2 x_{n+1/2} - 2\gamma v_{n+1/2} - \beta x_{n+1/2}^3 + f \cos(\omega(n + 1/2)h) \right], \end{aligned} \quad (14.27)$$

где величины, отмеченные индексом $n+1/2$, получаются посредством вспомогательного «полушага», выполняемого по схеме первого порядка:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + hv_{n+1/2}, \\ v_{n+1} &= v_n + h \left[-\omega_0^2 x_{n+1/2} - 2\gamma v_{n+1/2} - \beta x_{n+1/2}^3 + f \cos(\omega(n + 1/2)h) \right]. \end{aligned} \quad (14.28)$$

Имея дело с неавтономными системами, можно рекомендовать всегда выбирать шаг так, чтобы период внешнего воздействия содержал целое число шагов, в нашем случае $h = 2\pi/\omega N$, где N – достаточно большое целое число (скажем, порядка сотни или тысячи).

Предположим, мы реализовали схему в виде компьютерной программы, задали какие-то начальные условия (x_0, v_0) и, запустив ее, получаем шаг за шагом последовательные значения (x_n, v_n) . Мы можем представить результаты расчетов в виде графиков зависимости координаты и скорости от времени или в виде фазового портрета – картинки, представляющей собой проекцию траектории из трехмерного фазового пространства на плоскость (x, v) . Мы можем отследить процесс установления режима вынужденных колебаний и, дождавшись его окончания, исследовать форму колебаний в установившемся режиме, провести дальнейшую обработку с целью получить спектр Фурье или какие-то усредненные характеристики.

Сейчас нас будет интересовать именно сопоставление расчетов с аналитическими результатами метода медленно меняющихся амплитуд. Именно, мы хотим воспроизвести в численном эксперименте резонансные кривые, характерные для нелинейного резонанса и пронаблюдать эффект гистерезиса. Зададим для начала следующие значения параметров: $\omega_0=4$, $\gamma = 0.01$, $\beta=0.1$, что, по-видимому, в какой-то мере соответствует условиям применимости метода медленно меняющихся амплитуд.

Читатель может спросить, почему бы не взять, скажем, $\omega_0=400$, $\gamma = 0.001$, $\beta=0.001$? Одна из причин состоит в том, что в этой ситуации численное решение по стандартной схеме стало бы слишком трудоемким: шаг должен составлять малую долю характерного временного периода $2\pi/\omega_0$, а продолжительность переходного процесса будет определяться характерным временем порядка $1/\gamma$, так что придется иметь дело с *очень* большим числом шагов. Другая причина в том, что нам желательно не только подтвердить аналитические результаты, но и пронаблюдать отклонения от них.

Параметры f и ω будем выбирать так, чтобы обеспечить заданные величины для фигурировавших в нашем рассмотрении безразмерных комбинаций $P = (3\beta f^2)/(32\gamma^3\omega_0^3)$ и $\Delta = \delta/\gamma$.

Величина, которая требуется для сопоставления с аналитическими результатами, – это амплитуда колебаний в установившемся режиме a_0 . Наиболее прямой метод получить ее состоит в том, чтобы в процессе вычислений отмечать те величины x_n , которые отвечают локальным максимумам и продолжать вычисления до тех пор, пока разница между двух последовательными найденными значениями максимумов станет меньше заданной погрешности. (Это будет указывать на окончание переходного процесса.)

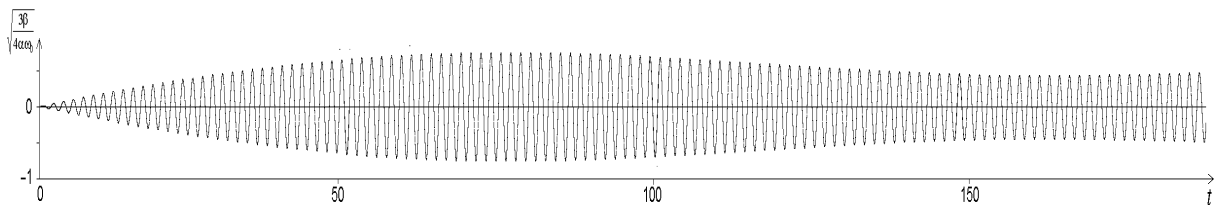


Рис.14.10. Зависимость нормированной координаты $x\sqrt{3\beta/8\gamma\omega_0}$ от времени, полученная численным интегрированием при $\omega_0=4$, $\gamma = 0.01$, $\beta=0.1$, и $\Delta=-3$, $P=3.6$, что соответствует $\omega = 3.97$, $f=0.15676$. Число шагов на период воздействия $N=4000$.

Зададим вначале некоторое отрицательное значение параметра расстройки Δ порядка нескольких единиц, произвольные начальные условия для x и v , скажем, $x_0=0$, $v_0=0$, и проведем вычисления по разностной схеме (14.27), (14.28) до достижения стационарного режима колебаний (см. рис. 14.10). Амплитуду, найденную как результат установления колебаний, отметим точкой на графике в координатах $\Delta = \delta/\gamma$, $X = (3\beta a_0^2)/(8\gamma\omega_0)$, в которых представлялись полученные аналитически резонансные кривые. Далее, дадим небольшое приращение величине Δ и повторим вычисления по разностной схеме с начальными условиями, полученными в результате установления

колебаний в предыдущей точке. Это даст следующую точку на графике и т.д. После прохождения всего выбранного интервала значений Δ сменим знак приращения, и будем двигаться вдоль оси Δ в противоположном направлении. На рис. 14.11а приведены результаты, полученные для $P=3.6$, это значение параметра интенсивности воздействия, при котором, согласно методу медленно меняющихся амплитуд, должны реализоваться гистерезис и скачкообразные переходы. Сплошная кривая соответствует формуле (14.22), точки, отмеченные кружочками, отвечают численным результатам, полученным при движении вдоль резонансной кривой слева направо, а квадратики – справа налево.

Можно видеть, что, во-первых, качественно описанная выше картина явлений при нелинейном резонансе замечательным образом подтверждается, наблюдается гистерезис и скачкообразные переходы. Во-вторых, вполне удовлетворительным оказывается и количественное соответствие. На рис.14.11б,в приводятся аналогичные результаты для $\gamma = 0.08$ и 0.64 . Видно, как возрастают отклонения от полученной аналитически резонансной кривой с ростом параметра потерь, в силу чего условия применимости метода медленно меняющихся амплитуд все более нарушаются.

На рис.14.12 представлены результаты, относящиеся к случаю отрицательного параметра нелинейности, $\beta=-0,1$, когда резонансная кривая оказывается наклоненной в противоположную сторону.

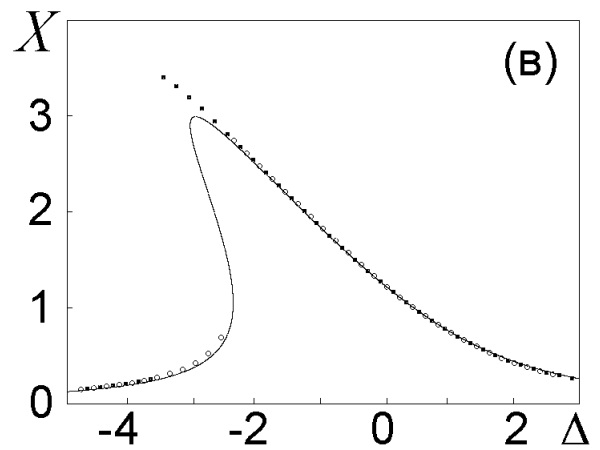
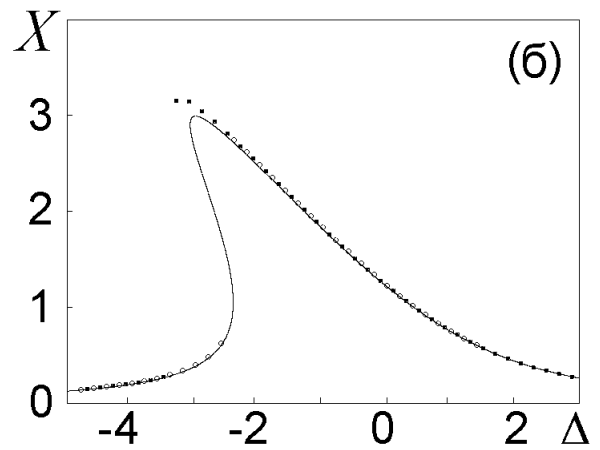
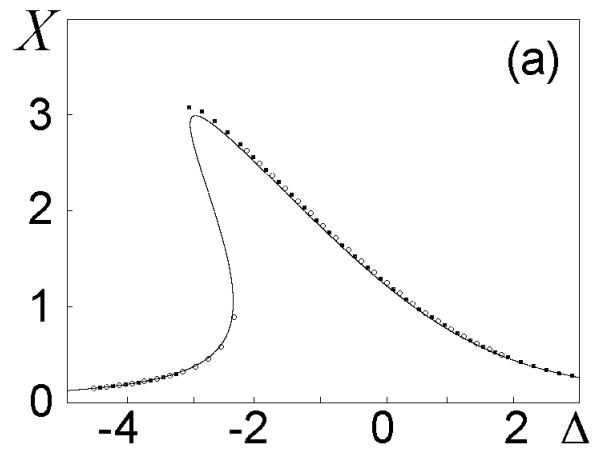
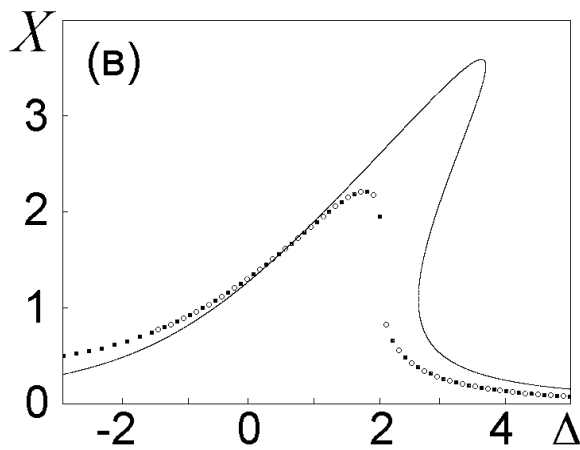
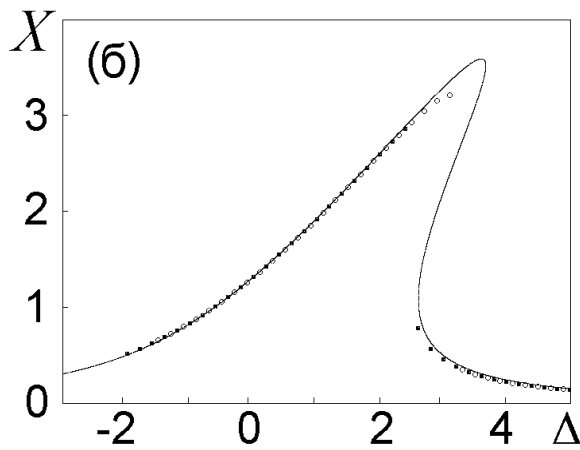
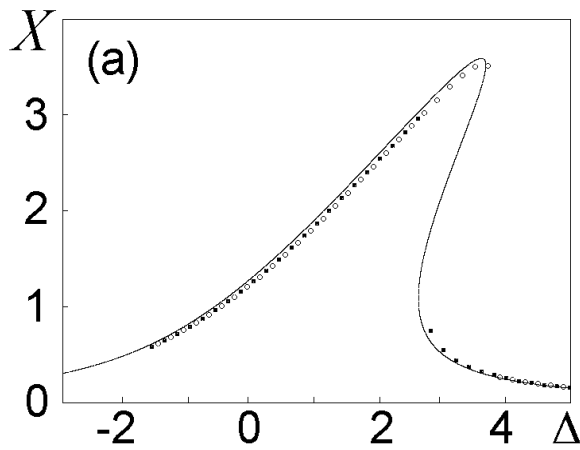


Рис. 14.11. Нелинейный резонанс: сопоставление полученной аналитически методом медленно меняющихся амплитуд резонансной кривой (сплошная линия) и численных результатов при $\omega_0=4$, $\beta=0.1$, комбинация $P = (3\beta f^2)/(32\gamma^3\omega_0^3)$ фиксирована и равна 3.6. Остальные параметры: (а) $\gamma = 0.01$, $f=0.15676$; (б) $\gamma = 0.08$, $f=3.5472$; (в) $\gamma = 0.64$, $f=80.264$. Кружочками обозначены точки, полученные при движении слева направо, а квадратиками – в обратном направлении.

Рис. 14.12. То же, что и на рис. 14.11, но для случая осциллятора с «мягкой» пружиной, $\beta=-0.1$. Аналитическое выражение для резонансной кривой отличается от формулы (14.21) только знаком Δ , а комбинация, характеризующая амплитуду колебаний, определена как $X = (3|\beta|a_0^2)/(8\gamma\omega_0)$. Величина $P = (3|\beta|f^2)/(32\gamma^3\omega_0^3)$ фиксирована и равна 3. Остальные параметры: (а) $\gamma = 0.02$, $f=0.4048$; (б) $\gamma = 0.04$, $f=1.1448$; (в) $\gamma = 0.08$, $f=3.2382$.