

## Метод точечных отображений

### **Понятие о точечных отображениях**

Всякий колебательный процесс является эволюционным во времени. Естественным, используемым столетиями аппаратом для описания таких процессов служили (и служат) дифференциальные уравнения. Однако в последнее время для тех же целей стали использовать другую математическую технику — *дискретные (точечные) отображения*. Альтернативный подход всегда важен и полезен для науки. В случае с дискретными отображениями ситуация еще более интересная. Дело в том, что можно установить связь между дифференциальными уравнениями и отображениями с помощью *метода сечений Пуанкаре*. Об этом мы немного поговорим в этой лекции, а также в лекции 14.

Наиболее естественное представление о дискретных отображениях можно получить при описании динамики биологических популяций. Пусть мы изучаем численность некоторой популяции год от года. Ясно, что в этом случае целесообразно сравнивать между собой численность, рассчитанную один раз в год в какой-то определенный момент времени. Можно ожидать, что численность  $x_{n+1}$  популяции в  $(n+1)$ -ый год является функцией ее численности  $x_n$  в предыдущий,  $n$ -ый год, и можно записать соотношение

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (13.1)$$

Это и есть простейшее дискретное отображение. Мы можем конкретизировать его вид, если сделаем несколько простых предположений. Пусть при малой численности популяции ее величина год от года меняется в геометрической прогрессии. Тогда

$$x_{n+1} = \lambda x_n, \quad (13.2)$$

где  $\lambda$  — параметр, определяющий скорость размножения. Ясно, однако, что при большой численности популяции, она не сможет расти так быстро. Эффекты конкуренции за источники питания приведут к ограничению численности. Предположим, что закон падения численности связан с квадратичной нелинейностью. Тогда уравнение (13.2) примет вид

$$x_{n+1} = \lambda x_n - x_n^2. \quad (13.3)$$

Полученное нами соотношение называется *логистическим отображением*. Несмотря на свой простой вид, оно служит одной из основных, фундаментальных моделей нелинейной динамики и теории динамического хаоса.

Эволюцию, описываемую дискретными отображениями, удобно представлять на *итерационных диаграммах* (их иногда еще называют *диаграммами Ламерея*). На диаграмме откладывают зависимость переменной  $x_{n+1}$  от  $x_n$ , т.е. функцию  $f(x)$ , и проводят биссектрису, как показано на рис. 13.1. Тогда эволюция переменной  $x$  представляется на диаграмме некоторой «лесенкой». (Продумайте тщательно процедуру построения итерационной диаграммы).

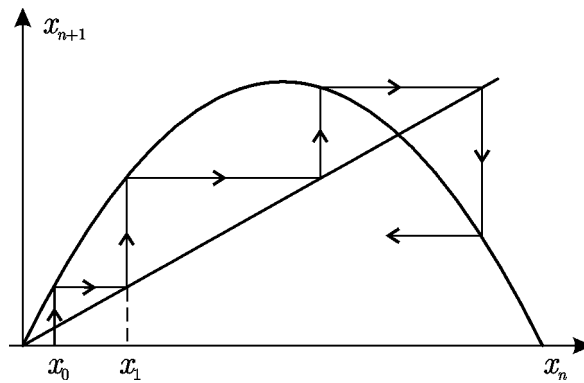


Рис. 13.1. Построение итерационной диаграммы для логистического отображения.

Эволюционный процесс, описываемый дискретными отображениями, обычно имеет две стадии: переходный процесс и его результат — некоторое установившееся движение (конечно, четкой границы между этими стадиями нет, она определяется точностью вычислений). Простейшим вариантом развития событий служит такой, когда численность популяции устанавливается постоянной, равной некоторому числу  $X$ . Очевидно, что для отображения (13.1) эта ситуация приводит к соотношению  $X = f(X)$ . В таком случае говорят, что отображение имеет *неподвижную точку*. неподвижная точка может быть *устойчивой* или *неустойчивой*. Критерием этого служит величина производной  $df/dx$ , вычисленная в неподвижной точке  $x = X$ . Действительно, если задать малое возмущение  $\tilde{x}$ , так что  $x_n = X + \tilde{x}_n$  и линеаризовать отображение (13.1), то получим

$$\tilde{x}_{n+1} = f'(X)\tilde{x}_n \quad (13.4)$$

Если эта производная по модулю меньше единицы, то возмущение затухает при итерациях, и точка устойчива, в противном случае возмущение будет нарастать, и неподвижная точка будет неустойчивой.

Установившиеся режимы могут носить и более сложный, колебательный характер. Например, численность популяции может изменяться с периодом в 2 года, т.е. представляться последовательностью  $X_1, X_2, X_1, X_2, \dots$ . В этом случае говорят, что отображение имеет *цикл периода 2*. Поэкспериментировав на компьютере с логистическим отображением (13.3), Вы убедитесь, что возможны циклы других периодов. Более того, может возникнуть нерегулярный во времени процесс – *динамический хаос*.

**Задача 13.1.** Найдите неподвижную точку логистического отображения и исследуйте ее устойчивость в зависимости от параметра  $\lambda$ .

**Задача 13.2.** Найдите в явном виде элементы 2-цикла логистического отображения. В каком интервале параметра  $\lambda$  существует 2-цикл?

**Задача 13.3.** Постройте с помощью компьютера итерационные диаграммы для логистического отображения для значений параметра  $\lambda = 1.0, 1.2, 1.4, 1.5$  и  $1.9$ . Какой процесс будет устанавливаться в каждом случае по прошествии достаточно большого времени?

**Задача 13.4.** Дискретное отображение  $x_{n+1} = f(x_n)$  имеет неподвижную точку  $x^*$  такую, что  $f'(x^*) \neq 0$ . Покажите, что поведение последовательности  $y_n = x_n - x^*$  в малой окрестности этой точки соответствует сходящейся геометрической прогрессии, если  $|f'(x^*)| < 1$  и расходящейся при  $|f'(x^*)| > 1$ .

**Задача 13.5.** Найдите неподвижные точки отображения  $x_{n+1} = \varepsilon \log(1 + x_n)$  и исследуйте их на устойчивость. Решение проиллюстрируйте итерационной диаграммой.

На первый взгляд, дискретные отображения хотя и являются интересным математическим объектом, но как аппарат для физика не столь полезны по сравнению с алгеброй, тригонометрией, дифференциальными уравнениями и др. На самом деле это не так, подобный взгляд скорее дань традиции. Приведем несколько примеров, когда дискретные отображения возникают естественным образом.

Пусть имеется генератор пилообразных колебаний, выходной сигнал которого представляет собой напряжение  $V$ , убывающее по линейному закону:  $V(t) = U_0 - \alpha(t - t_n)$ , где  $U, \alpha$  — постоянные, до тех пор, пока не достигнет нуля в некоторый момент времени  $t_n$ . После этого напряжение скачком увеличивается до величины  $U_0$  (рис. 13.2a). Колебания будут периодическими во времени с периодом

$T = U_0/\alpha$ . Далее рассмотрим ситуацию, когда присутствует внешнее воздействие, изменяющее верхний порог по гармоническому закону:  $U(t) = U_0 + U_m \cos(\omega t)$  (рис. 13.2б). Теперь «склон» импульса описывается уравнением

$$V(t) = U(t_n) - \frac{U_0(t-t_n)}{T}. \quad (13.5)$$

Нетрудно получить соотношение, связывающее моменты  $t_{n+1}$  и  $t_n$ . Поскольку в момент  $t_{n+1}$  напряжение должно обращаться в нуль, имеем

$$U_0 + U_m \cos(\omega t_n) - \frac{U_0(t_{n+1} - t_n)}{T} = 0. \quad (13.6)$$

Разрешая это соотношение относительно  $t_{n+1}$  и переходя к безразмерной переменной  $\theta_n = \omega t_n$ , получим

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega + f \cos \theta_n, \quad (13.7)$$

где  $\Omega = \omega T$  — расстройка,  $f = \omega T U_m / U_0$  — безразмерная амплитуда внешнего воздействия. Это еще одна из эталонных моделей нелинейной динамики, которую называют *отображением окружности*.

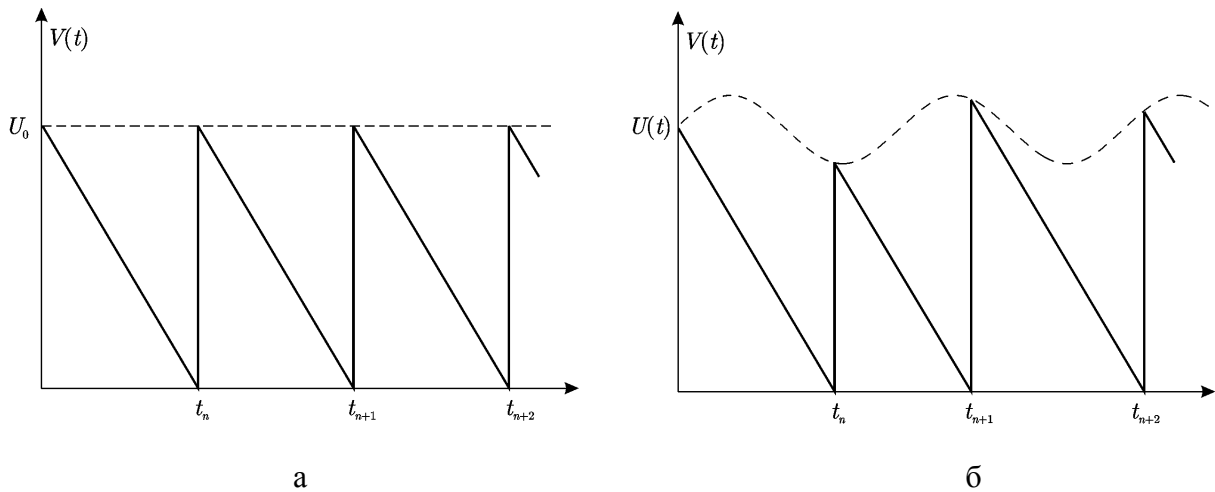


Рис. 13.2. Сигнал, генерируемый автономным (а) и неавтономным (б) генератором пилообразных колебаний.

Обратимся теперь к задаче о шарике, который подпрыгивает на вибрирующем по гармоническому закону столе (рис. 13.3). Важный шаг в анализе задачи — выбор переменных, эволюционирующих в дискретном времени. В нашем случае в качестве таковых можно выбрать скорость шарика сразу после удара  $v_n$  и время в момент удара

$t_n$ . В этом случае задача описывается не к одномерным, как ранее, а к *двумерным* отображением. Более того, оно может быть *консервативным*, если потери энергии при ударе отсутствуют, а может быть *диссипативным*, если шарик при ударе теряет некоторую часть своей энергии. Вид этого отображения и его свойства будут изучены в лекции 17.

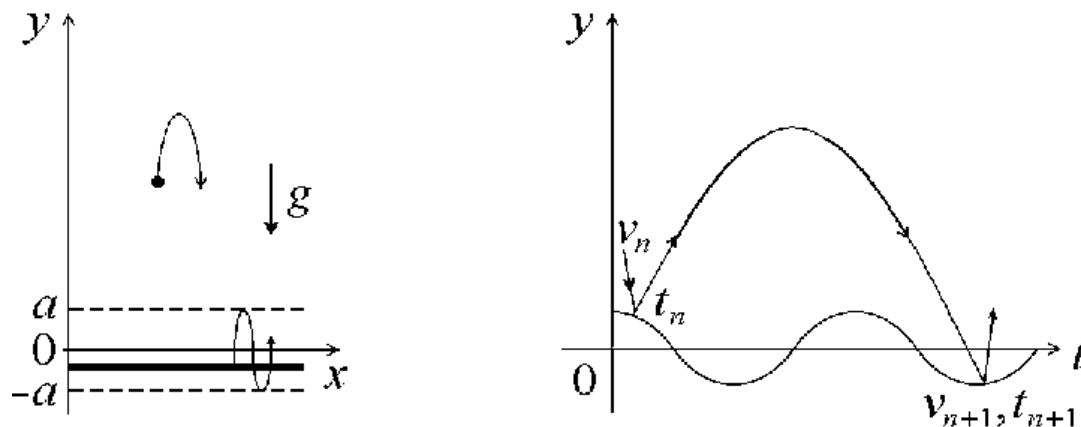


Рис. 13.3. Шарике, подпрыгивающий на вибрирующем столе

Еще один пример — луч света, распространяющийся по волноводу, образованному двумя идеально отражающими поверхностями. Одна из поверхностей «гофрирована» — имеет синусоидальный профиль. Здесь в качестве переменных удобно выбрать точку  $x_n$  и угол падения  $\varphi_n$  на нижнее зеркало (рис. 13.4). Покажите самостоятельно, что такая система в случае слабой гофрировки описывается отображением

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= \varphi_n - 2a \sin x_n, \\ x_{n+1} &= x_n - h \operatorname{tg} \varphi_n, \end{aligned} \quad (13.8)$$

где  $a$  и  $h$  — параметры, характеризующие геометрию системы.

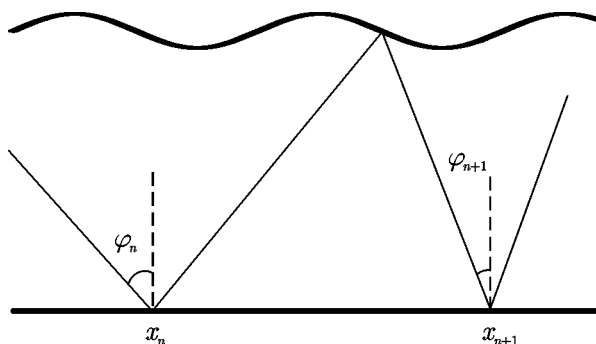


Рис. 13.4. Распространение светового луча в волновде с гофрированной стенкой

Можно привести еще множество примеров, которые убедительно показывают, что дискретные отображения — это естественный язык физики и теории колебаний.

**Задача 13.6.** Покажите, что отображение  $x_{n+1} = (x_n + a/x_n)/2$  можно использовать для вычисления квадратного корня из числа  $a$  (такой способ применяли еще в древнем Вавилоне). Найдите первые пять членов последовательности  $x_n$ , порождаемой этим отображением при  $a = 2$ . Величину  $x_0$  положите равной единице. Проиллюстрируйте решение задачи с помощью итерационной диаграммы. Покажите, что неподвижная точка этого отображения устойчива. Можно ли использовать отображение  $x_{n+1} = a/x_n$ ?

### Точечное отображение для генератора Ван-дер-Поля.

#### Случай квазигармонических автоколебаний.

Покажем, как можно использовать метод точечных отображений для анализа некоторых простых автоколебательных систем. Рассмотрим осциллятор Ван-дер-Поля в режиме квазигармонических автоколебаний. Поскольку мы имеем дело с системой второго порядка, фазовое пространство которой двумерно, можно получить одномерное отображение вида  $x_{n+1} = f(x_n)$ , причем в качестве  $x_n$  удобно выбрать точки пересечения траектории с положительной полуосью  $OX$  (рис. 13.5). Воспользуемся приближенным решением, которое было получено в лекции 12 при помощи метода медленно меняющихся амплитуд

$$x(t) \approx 2a(t)\cos(t + \varphi_0), \quad (13.9)$$

$$a(t) = \frac{\sqrt{\lambda}a_0 \exp(\lambda t/2)}{\sqrt{\lambda + a_0^2 [\exp(\lambda t) - 1]}}. \quad (13.10)$$

Здесь  $a_0$  и  $\varphi_0$  — начальная амплитуда и фаза. Без ограничения общности можно выбрать  $\varphi_0 = 0$ . В точках пересечения с осью  $OX$  можно приближенно положить  $\cos t \approx 1$ ,  $t \approx 2\pi n$  (соответствие будет тем лучше, чем меньше параметр  $\lambda$ ) и получить следующие выражения

$$x_n = \frac{2\sqrt{\lambda}x_0 \exp(\pi n \lambda)}{\sqrt{4\lambda + x_0^2 [\exp(2\pi n \lambda) - 1]}}, \quad (13.11)$$

$$x_{n+1} = \frac{2\sqrt{\lambda}x_0 \exp(\pi(n+1)\lambda)}{\sqrt{4\lambda + x_0^2 [\exp(2\pi(n+1)\lambda) - 1]}}, \quad (13.12)$$

где введено обозначение  $x_0 = 2a_0$ . Остается выразить  $x_{n+1}$  через  $x_n$ . После несложных вычислений находим явное выражение для функции последования

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{x_n \exp(\pi\lambda)}{\sqrt{1 + \frac{x_n^2}{4\lambda} [\exp(2\pi\lambda) - 1]}}. \quad (13.13)$$

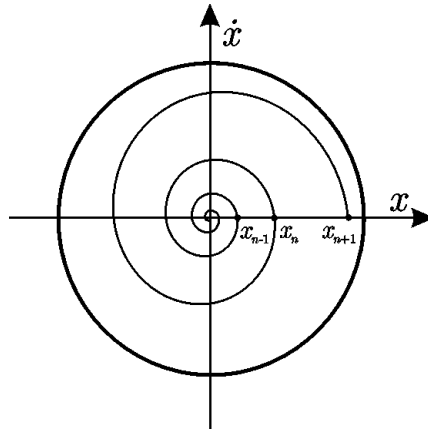


Рис. 13.5. К описанию динамики осциллятора Ван-дер-Поля при помощи одномерного отображения.

Отображение (13.13) имеет две неподвижные точки:  $x_1 = 0$ , что отвечает отсутствию колебаний, и  $x_2 = 2\sqrt{\lambda}$ , что отвечает режиму установившихся автоколебаний. При этом значение амплитуды колебаний в точности соответствует найденному при помощи метода медленно меняющихся амплитуд (см. формулу (12.12)).

Проведем анализ неподвижных точек на устойчивость. Дифференцируя выражение (13.13), получаем

$$f'(x) = \frac{8e^{\pi\lambda}}{\left(4 + \frac{x^2}{\lambda}(e^{2\pi\lambda} - 1)\right)^{3/2}}, \quad (13.14)$$

откуда нетрудно найти, что  $f'(x_1) = \exp(\pi\lambda)$ ,  $f'(x_2) = \exp(-2\pi\lambda)$ . Таким образом, нулевое состояние равновесия теряет устойчивость при  $\lambda = 0$ , что соответствует порогу бифуркации Андронова — Хопфа. При  $\lambda > 0$  появляется вторая неподвижная точка, которая является устойчивой. На рис. 13.6 построены функции последования при различных значениях  $\lambda$  и приведен пример построения диаграммы Ламерея.

Для автоколебательной системы с жестким возбуждением (12.42) отображение последования может быть построено численно (рис. 13.7). В этом случае при  $\lambda = -\mu^2/8$  появляются две неподвижные точки

$$x_{\pm} = \sqrt{\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 8\lambda}}, \quad (13.15)$$

одна из которых отвечает устойчивому предельному циклу, другая — неустойчивому. Такая ситуация имеет место в диапазоне параметров  $-\mu^2/8 < \lambda < 0$ . При  $\lambda = 0$  неустойчивая особая точка  $x_-$  сливается с особой точкой в начале координат, которая теряет устойчивость.

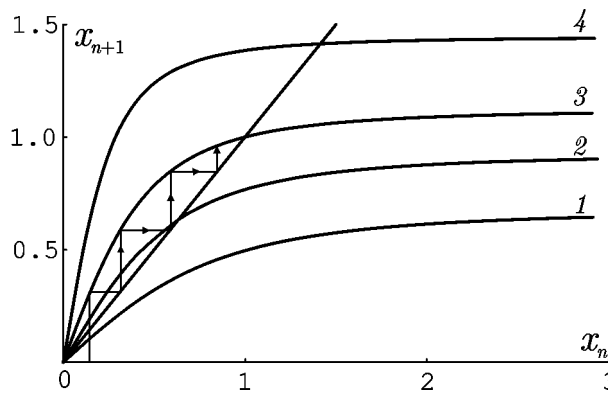


Рис. 13.6. Вид функций последования для отображения (13.5) при различных значениях  $\lambda$  и пример построения диаграммы Ламерея: 1 —  $\lambda = -0.1$ ; 2 —  $\lambda = 0.1$ ; 3 —  $\lambda = 0.25$ ; 4 —  $\lambda = 0.5$ .

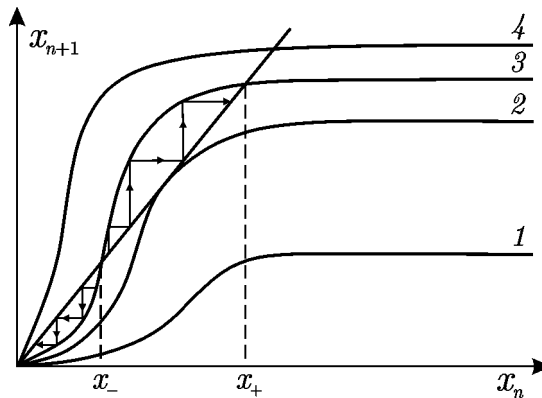


Рис. 13.7. Вид функций последования для автоколебательной системы с жестким возбуждением: 1 —  $\lambda < -\mu^2/8$ ; 2 —  $\lambda = -\mu^2/8$ ; 3 —  $-\mu^2/8 < \lambda < 0$ ; 4 —  $\lambda > 0$ .

**Задача 13.7.** Пользуясь приближением медленно меняющихся амплитуд, получите отображение для линейного осциллятора с затуханием

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

считая параметр  $\gamma$  малым. Изобразите для него диаграмму Ламерея.



**Задача 13.8.** Получите отображение, соответствующее укороченному уравнению для колебательного контура с нелинейным резистором из задачи 9.11. Изобразите для него диаграмму Ламерея. Сравните полученный результат с предыдущей задачей.

Таким образом, при помощи метода точечных отображений можно достаточно наглядно исследовать основные особенности динамики автоколебательных систем, определять положения состояний равновесия и предельных циклов, выяснять вопрос об их устойчивости и т.д. Здесь мы рассмотрели лишь наиболее простые примеры. Однако использование этого метода часто помогает и в более сложных случаях. В особенности это относится к системам со сложной динамикой.

**Задача 13.9.** Получите отображение, соответствующее укороченному уравнению для автогенератора с жестким возбуждением  $\ddot{x} - (\lambda + \mu x^2 - x^4)\dot{x} + x = 0$  в случае  $\mu = 0$ .

### **Ламповый генератор со ступенчатой характеристикой**

В лекции 11 был рассмотрен ряд примеров радиотехнических автогенераторов, динамика которых описывается уравнением Ван-дер-Поля в случае, когда нелинейная характеристика активного элемента аппроксимируется кубическим полиномом. Например, для лампового генератора, схема которого приведена на рис. 11.5а,б, можно таким образом аппроксимировать анодно-сеточную характеристику триода (рис. 11.5,в) в окрестности рабочей точки. Более простую теорию можно построить для генератора со ступенчатой характеристикой вида (рис. 13.8а)

$$i_a(u) = \begin{cases} I_0, & u > 0 \\ 0, & u < 0 \end{cases} \quad (13.16)$$

Как было показано в лекции 11, динамика генератора описывается уравнением

$$L \frac{d^2 i_L}{dt^2} + R \frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{C} = \frac{i_a(u)}{C}. \quad (13.17)$$

Обозначения приведены на рис. 11.5. Удобно ввести новую переменную  $I = i_L - I_0/2$ .

Тогда уравнения (13.16), (13.17) примут вид

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + 2\gamma \frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = \omega_0^2 I_0/2, \quad u > 0, \quad (13.18)$$

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + 2\gamma \frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = -\omega_0^2 I_0/2, \quad u < 0, \quad (13.19)$$

где введены обозначения  $2\gamma = R/L$ ,  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

Построим фазовый портрет генератора. Уравнения (13.10), (13.11) представляют собой уравнения линейного осциллятора с затуханием, у которых состояния равновесия сдвинуты относительно начала координат на  $I_0/2$  и  $-I_0/2$ , соответственно. На фазовой плоскости  $(I, \dot{I})$  первое из этих уравнений отвечает верхней, а второе — нижней полуплоскости (поскольку  $u = M dI/dt$ ). Необходимо построить фазовые портреты осцилляторов (13.10), (13.11) и затем «сшить» фазовые траектории на горизонтальной оси. Результат представлен на рис. 13.4б. Имеется целый континуум неустойчивых состояний равновесия — отрезок  $-I_0/2 < I < I_0/2$ , лежащий на горизонтальной оси.<sup>1</sup> Фазовые траектории, выходящие из различных точек этого отрезка, имеют вид раскручивающихся спиралей, которые наматываются на предельный цикл.

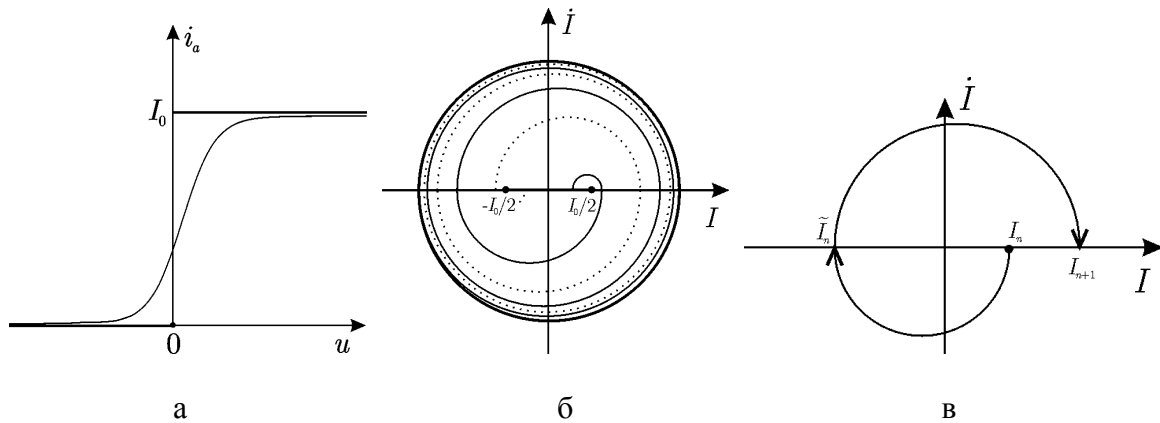


Рис. 13.8. а) — анодно-сеточная характеристика триода и ее аппроксимация ступенчатой функцией (13.8); б) — фазовый портрет лампового генератора; в) — рисунок, поясняющий построение точечного отображения.

Метод точечных отображений позволяет легко определить размер предельного цикла и доказать его устойчивость. Будем рассматривать точки пересечения фазовой траектории с горизонтальной осью (рис. 13.8в). Пусть траектория переходит из верхней полуплоскости в нижнюю в точке  $I_n > 0$ . В нижней полуплоскости движение подчиняется уравнению (13.19), решение которого запишем в виде

<sup>1</sup> Это является следствием аппроксимации зависимости  $i_a(u)$  сингулярной (ступенчатой) функцией. Подобная ситуация характерна и для других систем с аналогичными нелинейными характеристиками, например, для осциллятора с «сухим» трением (задача 9.10).

$$I = -\frac{I_0}{2} + \left( I_n + \frac{I_0}{2} \right) e^{-\gamma t} \cos \omega t, \quad (13.20)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ . Найдем координату  $\tilde{I}_n < 0$  следующего пересечения с горизонтальной осью. Будем считать, что затухание слабое,  $\gamma \ll \omega_0$ , так что пересечение произойдет в момент времени  $t \approx T/2$ , где  $T = 2\pi/\omega_0$  — период колебаний консервативного осциллятора. В уравнении (13.20) можно положить  $\cos \omega t \approx -1$  и найти, что

$$\tilde{I}_n = -\frac{I_0}{2} - \left( I_n + \frac{I_0}{2} \right) e^{-\gamma T/2}. \quad (13.21)$$

Далее траектория переходит в верхнюю полуплоскость, где определяется из уравнения (13.18), решение которого есть

$$I = \frac{I_0}{2} + \left( \tilde{I}_n - \frac{I_0}{2} \right) e^{-\gamma t} \cos \omega t. \quad (13.22)$$

Время движения до следующего пересечения горизонтальной оси по-прежнему составляет примерно половину периода колебаний. Полагая в уравнении (13.22)  $t \approx T/2$ ,  $\cos \omega t \approx -1$ , находим точку  $I_{n+1}$ :

$$I_{n+1} = \frac{I_0}{2} - \left( \tilde{I}_n - \frac{I_0}{2} \right) e^{-\gamma T/2}. \quad (13.23)$$

Подставляя сюда соотношение (13.21), окончательно приходим к одномерному отображению

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{I_0}{2} - \left( -\frac{I_0}{2} - \left( I_n + \frac{I_0}{2} \right) e^{-\gamma T/2} - \frac{I_0}{2} \right) e^{-\gamma T/2} = \\ &= \frac{I_0 (1 + e^{-\gamma T/2})^2}{2} + I_n e^{-\gamma T}. \end{aligned} \quad (13.24)$$

Заметим, что значения  $I_n$  считаются положительными, см. рис. 13.8б. Как видно из (13.24), функция последования в данном случае является линейной. Имеется единственная неподвижная точка

$$I^* = \frac{I_0 (1 + \text{ch}(\gamma T/2))}{2 \text{sh}(\gamma T/2)}, \quad (13.25)$$

которая определяет характерный размер предельного цикла. Нетрудно видеть, что она является устойчивой. На рис. 13.9 построена диаграмма Ламерея, при помощи которой можно наглядно представить процесс установления амплитуды колебаний.

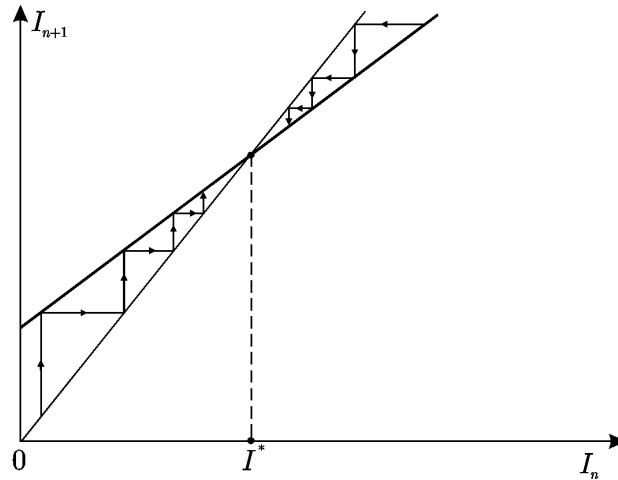


Рис. 13.9. Диаграмма Ламерея для лампового генератора со ступенчатой характеристикой.

**Задача 13.10.** Получите отображение, описывающее разгон релятивистской частицы в циклическом резонансном ускорителе заряженных частиц — циклотроне. Частица вращается в однородном магнитном поле  $B_0$  с циклотронной частотой  $\omega_c = \frac{qB_0}{m}$  ( $q$  и  $m$  — заряд и масса частицы, соответственно), периодически проходя через ускоряющий промежуток (зазор), к которому приложено высокочастотное напряжение  $V(t) = V_0 \sin \omega t$  (рис. 13.10). Если частота изменения ускоряющего напряжения  $\omega$  близка к циклотронной частоте, частица будет каждый раз попадать в ускоряющую фазу, увеличивая таким образом свою энергию.

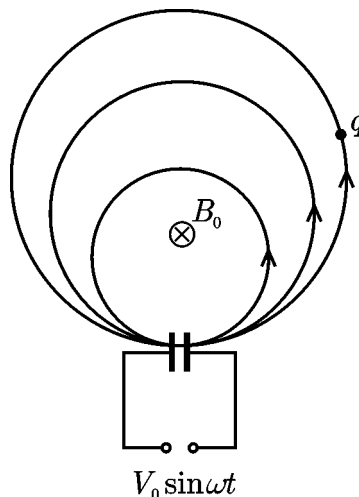


Рис. 13.10. Разгон заряженной частицы в циклотроне.

*Решение.* Будем рассматривать динамику частицы в дискретные моменты времени, когда она проходит через ускоряющий промежуток. Считая ускоряющий промежуток достаточно узким, предполагаем, что частица проходит через него практически мгновенно (по сравнению с периодом высокочастотного на-

пряжения  $T = 2\pi/\omega$ ), так что изменением напряжения за это время можно пренебречь. Поскольку речь идет о релятивистской частице, ключевым моментом является учет релятивистской зависимости массы от скорости. Такую частицу можно рассматривать как неизохронный нелинейный осциллятор (см. лекцию 2).

Энергия частицы после  $n$ -ного прохода через ускоряющий промежуток равна  $E_n = m_n c^2 = \gamma_n m_0 c^2$ , где  $m_0$  — масса покоя частицы,  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  — релятивистский масс-фактор. Закон сохранения энергии при прохождении зазора запишется следующим образом:

$$m_0 c^2 \gamma_{n+1} = m_0 c^2 \gamma_n + qV_0 \sin \omega t_n, \quad (13.26)$$

где  $t_n$  — время  $n$ -ного попадания в зазор. Следующее попадание в зазор, очевидно, произойдет в момент времени

$$t_{n+1} = t_n + \frac{2\pi}{\omega_c(\gamma_n)} = t_n + \frac{2\pi m_0 \gamma_n}{qB_0}. \quad (13.27)$$

Объединяя уравнения (13.26) и (13.27) и вводя обозначение для фазы частицы  $\theta_n = \omega t_n$ , окончательно приходим к двумерному отображению с двумя управляющими параметрами

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} &= \gamma_n + \varepsilon \sin \theta_n, \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \Delta \gamma_n. \end{aligned} \quad (13.28)$$

Здесь  $\varepsilon = qV_0/m_0 c^2$ ,  $\Delta = 2\pi\omega/\omega_0$ ,  $\omega_0 = qB_0/m_0$ . Отображение (13.28) называют *отображением Чирикова* или *Чирикова — Тейлора*. Оно может демонстрировать разнообразные, в том числе хаотические режимы поведения.

Если бы не релятивистская зависимость циклотронной частоты от энергии, последнее уравнение (13.28) имело вид  $\theta_{n+1} = \theta_n + \Delta$ , так что при совпадении частот  $\omega$  и  $\omega_0$  частица после каждого оборота попадала бы в одну и ту же фазу поля и ускорялась неограниченно. В действительности же с ростом энергии резонансное условие нарушается. Тем не менее, все равно существует возможность для неограниченного ускорения. Продумайте самостоятельно, какими для этого следует выбрать параметры  $\varepsilon$  и  $\Delta$ , и как будет происходить движение частицы.

### **Системы под импульсным периодическим воздействием**

Важный класс задач, в которых возникают дискретные отображения, связан с изучением *систем, находящихся под импульсным периодическим воздействием*. В качестве примера получим дискретное отображение для осциллятора с кубической нелинейностью и затуханием, совершающего колебания под воздействием периодической последовательности  $\delta$ -импульсов:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = \sum C\delta(t - nT)$$

Будем считать, что в промежутке между импульсами применим метод медленно меняющихся амплитуд. В этом случае решение представим в виде квазигармонического колебания с медленно меняющейся амплитудой

$$x = Ae^{i\omega_0 t} + A^* e^{-i\omega_0 t}, \quad (13.29)$$

где  $A, A^*$  — медленно меняющиеся функции времени. В промежутке между импульсами для комплексной амплитуды справедливо «укороченное» уравнение, которое было получено в лекции 9

$$\dot{A} = -\gamma A + \frac{3}{2} \frac{i\beta}{\omega_0} |A|^2 A. \quad (13.30)$$

Переходя в уравнении (13.30) к действительным амплитуде  $a$  и фазе  $\varphi$  ( $A = a \exp(i\varphi)/2$ ), можно получить следующие уравнения

$$\dot{a} = -\gamma a, \quad \dot{\varphi} = \frac{3}{8} \frac{\beta}{\omega_0} a^2. \quad (13.31)$$

Решая уравнения (13.31), найдем следующие зависимости амплитуды и фазы от времени в промежутке между  $n$ -ым и  $(n+1)$ -ым импульсами

$$a(t) = a_n e^{-\gamma t}, \quad (13.32)$$

$$\varphi(t) = \frac{3\beta a_n^2}{16\omega_0} \frac{1 - e^{-2\gamma t}}{\gamma} + \varphi_n, \quad (13.33)$$

где  $a_n$  и  $\varphi_n$  — начальные амплитуда и фаза сразу после  $n$ -го импульса. Если подставить выражения (13.32), (13.33) в вытекающие из (13.29) соотношения

$$x(t) = a(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (13.34)$$

$$v(t) = -\omega_0 a(t) \sin[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (13.35)$$

то мы найдем зависимости координаты и скорости осциллятора во времени на рассматриваемом промежутке времени. К моменту начала  $(n+1)$ -го импульса проходит время, равное периоду воздействия  $T$ . Поэтому координата осциллятора и скорость равны соответственно  $x(T)$  и  $v(T)$ . В силу дельта-образного характера воздействия сразу после этого импульса координата не изменится, а скорость получит добавку  $C$ . Поэтому для координаты и скорости после  $(n+1)$ -го импульса из (13.29), (13.34), (13.35) получаем следующие выражения

$$x_{n+1} = a_n e^{-\gamma T} \cos \left( \omega_0 T + \frac{3\beta}{16\omega_0} |a_n|^2 \frac{1 - e^{-2\gamma T}}{\gamma} + \varphi_n \right), \quad (13.36)$$

$$v_{n+1} = -\omega_0 a_n e^{-\gamma T} \sin \left( \omega_0 T + \frac{3\beta}{16\omega_0} |a_n|^2 \frac{1 - e^{-2\gamma T}}{\gamma} + \varphi_n \right) + C. \quad (13.37)$$

Удобно записать их в комплексной форме, введя комплексную переменную

$$z = \left[ ix + \frac{\nu}{\omega_0} \right] \sqrt{\frac{3\beta}{16\omega_0} \frac{1 - e^{-2\gamma T}}{\gamma}}. \quad (13.38)$$

Тогда относительно этой переменной из (13.36), (13.37) получаем искомое отображение

$$z_{n+1} = A + Bz_n \exp \left[ i \left( |z_n|^2 + \psi \right) \right], \quad (13.39)$$

Здесь новые параметры  $A$ ,  $B$  и  $\psi$  определяются через параметры исходной системы следующим образом

$$A = \frac{C}{\omega_0} \sqrt{\frac{3\beta}{16\omega_0} \frac{1 - e^{-2\gamma T}}{\gamma}}, \quad B = e^{-\gamma T}, \quad \psi = \omega_0 T.$$

Интересно, что точно такое же отображение было получено К. Икедой с соавторами (К. Ikeda, 1980) для кольцевого оптического резонатора, заполненного средой, в которой показатель преломления зависит от амплитуды поля. На рис. 13.11 показана плоскость параметров  $A$ ,  $B$  отображения Икеды, на которой оттенками серого цвета обозначены области различных периодических режимов. Так белый цвет отвечает устойчивой неподвижной точке, светло серый — циклу периода 2, черный — хаотическому поведению и т.д. Можно видеть, что плоскость параметров устроена достаточно сложно и демонстрирует разнообразные периодические и хаотические режимы. Это иллюстрируют и фазовые портреты, относящиеся к некоторым точкам плоскости параметров.

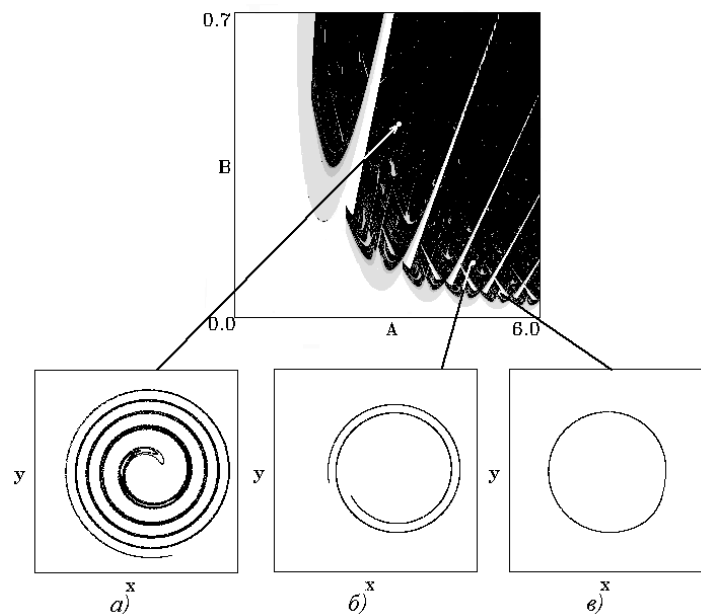


Рис. 13.11. Плоскость параметров для отображения Икеды и характерные фазовые портреты,  $\psi = 0$ .

**Задача 13.11.** Как видно из рис 13.11, в области малых  $B$  и больших  $A$  аттрактор отображения Икеды имеет тенденцию к сильному сжатию. Используя условие  $B \ll A$ , получите соответствующее одномерное отображение.

*Решение.* Используя подстановку  $z = A(1 + B\tilde{z})$ , можно получить

$$\tilde{z}_{n+1} = (1 + B\tilde{z}_n) \exp \left[ i \left( \varphi + \lambda \operatorname{Re} \tilde{z}_n + \frac{1}{2} \lambda B |\tilde{z}_n|^2 \right) \right],$$

где  $\lambda = 2A^2B$  и  $\varphi = A^2 + \psi$ . Если пренебречь в этом выражении малыми величинами, то для действительной части  $\operatorname{Re} \tilde{z}_n = \xi_n$  имеем одномерное отображение

$$\xi_{n+1} = \cos(\lambda \xi_n + \varphi),$$

**Задача 13.12.** Получите приближенно двумерное отображение для системы Ван-дер-Поля под воздействием периодической последовательности  $\delta$ -импульсов:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = B \sum \delta(t - nT),$$

*Ответ.* Отображение в комплексной форме выглядит следующим образом

$$z_{n+1} = \frac{z_n \exp(\lambda T/2 - iT)}{\sqrt{1 + |z_n|^2 \frac{e^{\lambda T} - 1}{4\lambda}}} + iB.$$

**Задача 13.13.** Для системы из предыдущей задачи получите приближенно одномерное отображение, считая параметр неравновесности  $\lambda$  большим.

*Ответ:*

$$\theta_{n+1} = \operatorname{arctg} \left( \frac{\sin \theta_n + C}{\cos \theta_n} \right) - T.$$

Здесь  $\theta$  — угол, на фазовой плоскости, под которым точка видна из начала координат,  $C = B/2\sqrt{\lambda}$ . Это отображение можно получить как предельным переходом из результата предыдущей задачи, так и непосредственно в предположении, что за время между импульсами изображающая точка успевает вернуться на предельный цикл.

**Задача 13.14.** Получите приближенно двумерное и одномерное отображения для неавтономной системы Ван-дер-Поля — Дуффинга вида

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 = \sum B\delta(t - nT),$$

*Ответ:*

$$z_{n+1} = \frac{z_n \exp(\lambda T/2 - iT)}{\sqrt{1 + |z_n|^2 \frac{e^{\lambda T} - 1}{4\lambda}}} e^{-i\psi_n} + iB, \quad \psi_n = \frac{3}{2} \beta \ln \left( 1 + \frac{|z_n|^2}{4\lambda} (e^{\lambda T} - 1) \right),$$

$$\theta_{n+1} = \operatorname{arctg} \left( \frac{\sin \theta_n + C}{\cos \theta_n} \right) - \Omega - \frac{3}{2} \beta \ln (1 + 2C \sin \theta_n + C^2),$$

где  $\Omega = T(1 + 3\beta\lambda/2)$ ,  $C = B/2\sqrt{\lambda}$ . Остальные обозначения вводятся аналогично предыдущей задаче.



**Задача 13.15.** Наличие фазовой нелинейности  $\beta x^3$  приводит к тому, что нетривиальная динамика фазы в неавтономном уравнении Ван-дер-Поля — Дуффинга возможна уже при малых амплитудах воздействия. Покажите, что при этом условии динамика фазы описывается традиционным синус-отображением окружности.

*Ответ:*  $\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - 3\beta C \sin \theta_n$