

Уравнения Ван-дер-Поля и Рэлея.

Бифуркация Андронова — Хопфа

Основными моделями для анализа периодических автоколебаний служат уравнения Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0, \quad (12.1)$$

и Рэлея

$$\ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + y = 0. \quad (12.2)$$

Как было показано в лекции 11, самовозбуждение автоколебаний происходит при $\lambda > 0$. По мере увеличения λ происходит постепенный переход от слабонелинейных квазигармонических колебаний к релаксационным (рис. 11.5). В данной лекции мы рассмотрим эти режимы более подробно.

Квазигармонические автоколебания.

Бифуркация Андронова — Хопфа

Проанализируем более подробно режим квазигармонических автоколебаний, когда параметр λ в уравнении Ван-дер-Поля мал. Воспользуемся методом усреднения (методом медленно меняющихся амплитуд), который был разработан Ван-дер-Полем именно для этой задачи (лекция 9). Будем искать решение в виде

$$x = A(t)e^{it} + A^*(t)e^{-it}, \quad (12.3)$$

причем наложим на A и A^* дополнительное условие

$$\dot{A}e^{it} + \dot{A}^*e^{-it} = 0. \quad (12.4)$$

Вычисляя \dot{x} , \ddot{x} с учетом (12.4) и подставляя в уравнение Ван-дер-Поля (12.1), после несложных преобразований получаем

$$2i\dot{A}e^{it} - (\lambda - 2|A|^2 - A^2e^{2it} + (A^*)^2e^{-2it})(iAe^{it} - iA^*e^{-it}) = 0. \quad (12.5)$$

Раскроем скобки и разделим это уравнение на $\exp(it)$, что дает

$$2i\dot{A} - i(\lambda - |A|^2)A + iA^3 e^{2it} + i(\lambda - |A|^2)A^* e^{-2it} - i(A^*)^3 e^{-3it} = 0. \quad (12.6)$$

Усредняя уравнение (12.6) по периоду $T = 2\pi$, что позволяет устранить быстро меняющиеся члены, приходим к *укороченному уравнению Ван-дер-Поля*

$$\dot{A} = \frac{1}{2}(\lambda - |A|^2)A. \quad (12.7)$$

Найдем решение этого уравнения. Вводя вещественные амплитуду a и фазу φ , $A = \frac{1}{2}ae^{i\varphi}$, и подставляя в уравнение (12.7), получаем

$$\dot{a} = \frac{1}{2}(\lambda - a^2)a, \quad (12.8)$$

$$\dot{\varphi} = 0, \quad (12.9)$$

Из уравнения (12.9) следует, что $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$, следовательно, в рамках сделанных приближений нет никакой поправки к частоте колебаний. Применительно к радиотехническим генераторам, рассмотренным в предыдущей лекции, это означает, что генерация происходит точно на собственной частоте колебательного контура.

Домножив уравнение (12.8) на a , получим

$$\dot{\rho} = (\lambda - \rho)\rho, \quad (12.10)$$

где $\rho = a^2$. Это уравнение легко интегрируется. Решение с начальным условием $\rho(t=0) = \rho_0$ имеет вид

$$\rho = \frac{\lambda}{1 + \left(\frac{\lambda - \rho_0}{\rho_0}\right)\exp(-\lambda t)}. \quad (12.11)$$

Если начальное возмущение мало $\rho_0 \ll \lambda$, то на начальной стадии ($\lambda t \ll 1$) амплитуда колебаний нарастает экспоненциально: $\rho = \rho_0 \exp(\lambda t)$. На больших временах $\rho \rightarrow \lambda$, т.е. устанавливаются автоколебания с постоянной амплитудой $a \rightarrow \sqrt{\lambda}$. Процесс установления амплитуды иллюстрирует рис. 12.1.

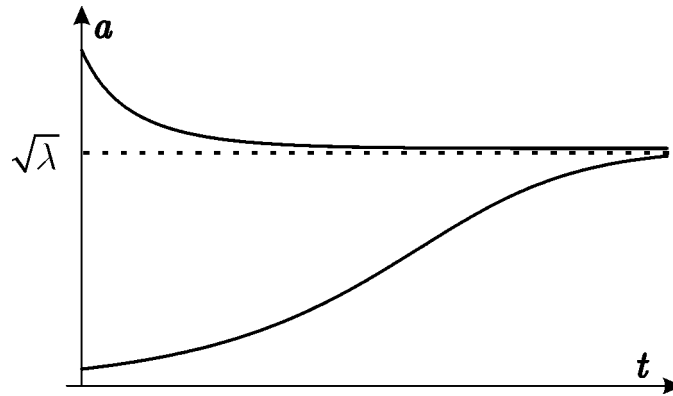


Рис. 12.1. Динамика амплитуды автоколебаний в процессе установления стационарного режима

Окончательно для исходной переменной $x(t)$ в режиме квазигармонических колебаний будем иметь

$$x(t) \approx 2\sqrt{\lambda} \cos(t + \varphi_0) + \dots, \quad (12.12)$$

где φ_0 — произвольная начальная фаза, а многоточием обозначены высшие гармонические составляющие, амплитуды которых малы. Их можно найти, например, при помощи метода многих масштабов, проводя разложения до членов более высоких порядков малости (в качестве малого параметра будет, очевидно, фигурировать величина $\sqrt{\lambda}$).

Таким образом, когда бифуркационный параметр λ проходит критическое значение $\lambda_c = 0$, фазовый портрет системы трансформируется следующим образом. При $\lambda < \lambda_c$ на фазовой плоскости имеется единственное состояние равновесия типа устойчивый фокус (рис. 12.2а). При $\lambda > \lambda_c$ оно становится неустойчивым и в его окрестности возникает устойчивый предельный цикл (рис. 12.3б). Характерный размер предельного цикла (т.е. амплитуда стационарных автоколебаний) увеличивается пропорционально $\sqrt{\lambda}$ (рис. 12.3в). Такая бифуркация называется *нормальной (суперкритической) бифуркацией Андронова — Хопфа*. Термин «суперкритический» связан с тем, что предельный цикл возникает только после того, как параметр превысит критическое значение. Поскольку амплитуда колебаний с ростом λ плавно увеличивается от нуля, говорят, что самовозбуждение происходит *мягко*. Важно отметить, что для всех систем с мягким самовозбуждением закон $a_{st} \sim \sqrt{\lambda - \lambda_c}$ является универсальным. Разумеется, речь идет лишь о слабой надкритичности, когда колебания являются квазигармоническими.

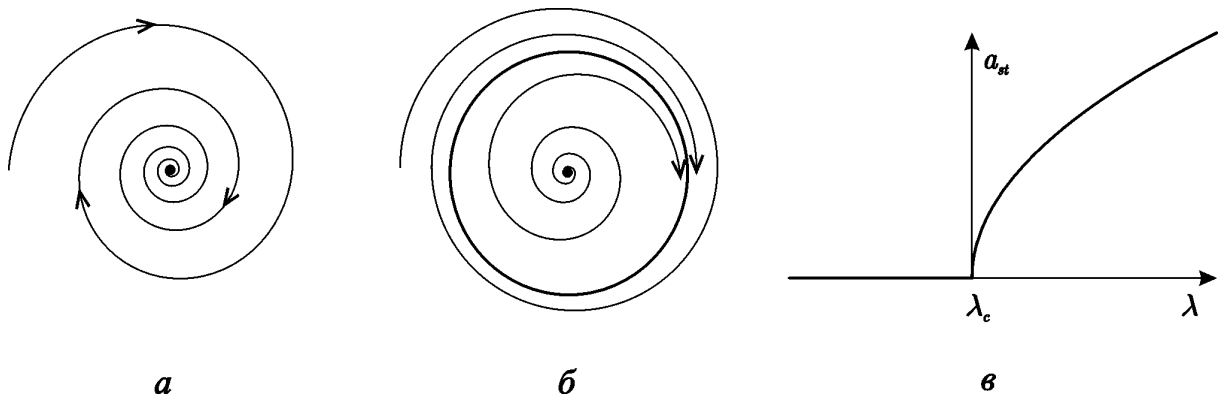


Рис. 12.2. Трансформация фазовых портретов при суперкритической бифуркации Андронова — Хопфа: а — $\lambda < \lambda_c$; б — $\lambda > \lambda_c$; в — зависимость характерного размера предельного цикла от бифуркационного параметра.

Задача 12.1. Покажите, что решение укороченного уравнения Ван-дер-Поля в случае $\lambda < 0$ при больших временах отвечает экспоненциальному затуханию. Соответствует ли множитель перед экспонентой начальной амплитуде колебаний? Почему?

Задача 12.2. С помощью укороченного уравнения (12.7) оцените время установления квазигармонических колебаний в системе, описываемой уравнением Ван-дер-Поля. Начальная амплитуда A_0 много меньше амплитуды установившихся колебаний. Как ведет себя время установления при приближении параметра к бифуркационному значению?

Задача 12.3. Получите укороченное уравнение, описывающее динамику медленно меняющейся амплитуды, для уравнения Ван-дер-Поля — Дуффинга

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 = 0, \quad (12.13)$$

и найдите его решение. Уравнение (12.13) описывает, например, радиотехнические генераторы, аналогичные описанным в лекции 11, когда в колебательный контур включена *нелинейная емкость*, т.е. элемент, заряд на котором нелинейным образом зависит от приложенного напряжения: $q = C_0 u + C_2 u^3$.

Решение. Получение укороченного уравнения не представляет принципиальной сложности по сравнению с уравнением Ван-дер-Поля. Поэтому сразу запишем результат:

$$\dot{A} = \frac{1}{2}(\lambda - |A|^2)A + \frac{3i\beta}{2}|A|^2 A. \quad (12.14)$$

Последнее слагаемое, отличающее его от (12.7), характеризует влияние фазовой нелинейности — нелинейный сдвиг частоты, типичный для уравнения Дуффинга (см. лекцию 8). Из уравнения (12.14) следуют уравнения для вещественных амплитуды и фазы (ср. (12.8), (12.9))

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{1}{2}(\lambda - a^2)a, \\ \dot{\phi} &= \frac{3\beta a^2}{2}. \end{aligned} \quad (12.15)$$

Первое уравнение в точности совпадает с (12.8), следовательно, установление амплитуды происходит так же, как и в осцилляторе Ван-дер-Поля (рис. 12.1). Можно подставить решение (12.11) во второе уравне-

ние системы (12.15) и найти динамику фазы колебаний. Предлагаем читателю проделать это самостоятельно. Заметим, что в режиме установившихся колебаний

$$\dot{\phi} = \frac{3\beta\lambda}{2}, \quad (12.16)$$

т.е. появляется постоянная поправка к частоте, пропорциональная параметру λ . Таким образом, здесь имеются два типа нелинейности: фазовая (нелинейный сдвиг частоты) и амплитудная (нелинейные потери), которые действуют по-разному. Первая изменяет частоту генерации, тогда как вторая ограничивает нарастание амплитуды, приводя к установлению стационарных автоколебаний.

Задача 12.4. Покажите, что для двумерной системы общего вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y), \end{aligned}$$

порог бифуркации Андронова Хопфа может быть определен из условия $S = 0$, $J > 0$, где S и J — след и якобиан матрицы, описывающей эволюцию возмущения исходных уравнений и вычисленной непосредственно в неподвижной точке. Найдите этим способом порог бифуркации Андронова Хопфа для уравнений брюсселятора (11.21).

Задача 12.5. Одна из распространенных в популяционной биологии моделей «хищник-жертва» может быть представлена в виде

$$\dot{x} = \alpha(x)x - xy, \quad \dot{y} = xy - ty.$$

Если положить $\alpha = \text{const}$, то мы получим классическую модель Вольтерра (подробнее см. Ю.М. Свирежев, «Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии», где рассмотрены и другие варианты такой системы). Покажите, что если функция $\alpha(x)$, характеризующая мальтузианский рост «жертвы», имеет вид, показанный на рис.12.3а, то в системе невозможна бифуркация Андронова-Хопфа, а если ее вид соответствует рис.12.3б, то такая бифуркация возможна. Найдите порог бифуркации в случае $\alpha(x) = a + bx - x^2$. (Предварительно покажите, что для произвольной параболической аппроксимации функции $\alpha(x)$ коэффициент перед членом x^2 действительно можно убрать перенормировкой.)

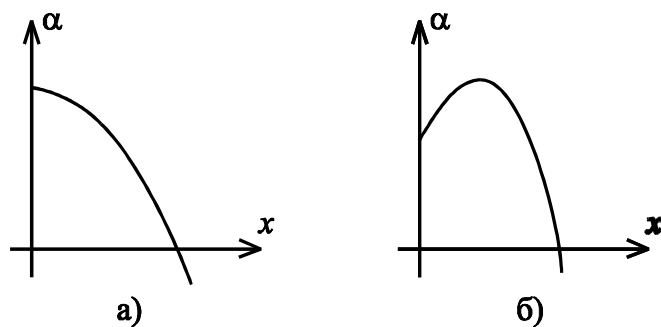


Рис. 12.3.

Задача 12.6. В лекции 11 была рассмотрена простая модель автоколебательной химической реакции — брюсселятор

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a - (b+1)x + x^2 y, \\ \dot{y} &= bx - x^2 y. \end{aligned} \quad (12.16)$$

В случае, когда параметр b слегка превышает критическое значение $b_c = a^2 + 1$, получите укороченное уравнение для амплитуды квазигармонических колебаний.

Решение. Поскольку, амплитуда квазигармонических колебаний пропорциональна корню из надкритичности, положим

$$b = b_c + \varepsilon^2, \quad (12.17)$$

где ε — малый параметр. Удобно также ввести вместо x и y новую переменную

$$\xi = x - x_0 + y - y_0, \quad (12.18)$$

где x_0, y_0 — равновесные значения. Они удовлетворяют соотношениям (11.21). С учетом выражений (12.17), (12.18) можно перейти от системы уравнений (12.16) к одному уравнению второго порядка относительно переменной ξ :

$$\ddot{\xi} - \left[\varepsilon^2 + 2a\xi + \frac{a^2 - 1}{a} \dot{\xi} - (\xi + \dot{\xi}) \dot{\xi} \right] \dot{\xi} + a^2 \xi = 0. \quad (12.19)$$

Для получения укороченного уравнения используем метод многих масштабов (лекция 9). Будем искать решение уравнения (12.19) в виде степенного ряда

$$\xi = \varepsilon \xi_1 + \varepsilon^2 \xi_2 + \varepsilon^3 \xi_3 + \dots \quad (12.20)$$

и введем медленные масштабы $T_n = \varepsilon^n t$. Мы начинаем разложения с членов порядка ε , потому что возмущения предполагаются малыми.

Выделяя в (11.19) члены первого порядка малости, получаем линейное уравнение

$$\mathcal{D}_0^2 \xi_1 + a^2 \xi_1 = 0, \quad (12.21)$$

где, как и ранее, введены обозначения $\mathcal{D}_n = \partial/\partial T_n$. Решение этого уравнения есть

$$\xi_1 = A \exp(iaT_0) + \text{к.с.}, \quad (12.22)$$

где $A = A(T_1, T_2, \dots)$ — медленно меняющаяся амплитуда.

Во втором порядке малости получаем уравнение

$$\mathcal{D}_0^2 \xi_2 + a^2 \xi_2 + 2\mathcal{D}_0 \mathcal{D}_1 \xi_1 - 2a \xi_1 \mathcal{D}_1 \xi_1 - \frac{a^2 - 1}{a} (\mathcal{D}_0 \xi_1)^2 = 0. \quad (12.23)$$

Подставляя сюда выражение (12.22) для ξ_1 , нетрудно убедиться, что единственным секулярным членом, пропорциональным $\exp(iaT_0)$, является слагаемое $2\mathcal{D}_0 \mathcal{D}_1 \xi_1$. Его, необходимо положить равным нулю, следовательно

$$\mathcal{D}_1 A = 0, \quad (12.24)$$

т.е. амплитуда A зависит только от медленного времени T_2 . Этот результат является следствием того, что управляющий параметр превышает критическое значение на величину порядка ε^2 , поэтому на временных масштабах порядка ε изменения амплитуды колебаний не проявляются. Уравнение (12.23) принимает вид

$$\mathcal{D}_0^2 \xi_2 + a^2 \xi_2 = 2a(a^2 - 1)|A|^2 - a(a - i)^2 A^2 \exp(2iaT_0) + \text{к.с.} \quad (12.25)$$

Это уравнение вынужденных колебаний гармонического осциллятора, решение которого легко находится:

$$\xi_2 = \frac{2(a^2 - 1)}{a}|A|^2 - \frac{(a - i)^2}{3a} A^2 \exp(2iaT_0) + \text{к.с.} \quad (12.26)$$

Видно, что во втором порядке нелинейность приводит к появлению постоянной составляющей и второй гармоники основной частоты.

Теперь выделим в уравнении (12.19) члены порядка ε^3 . Получим

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0^2 \xi_3 + a^2 \xi_3 + 2\mathcal{D}_0 \mathcal{D}_2 \xi_1 - \mathcal{D}_0 \xi_1 - 2a\mathcal{D}_0(\xi_1 \xi_2) - \\ - \frac{2(a^2 - 1)}{a}(\mathcal{D}_0 \xi_1 \mathcal{D}_0 \xi_2) + (\xi_1 + \mathcal{D}_0 \xi_1)(\mathcal{D}_0 \xi_1)^2 = 0. \end{aligned} \quad (12.27)$$

Сюда следует подставить выражения (12.22) и (12.26) для $\xi_{1,2}$ и выделить секулярные члены. После не представляющих принципиальной сложности, однако достаточно громоздких вычислений, приходим к укороченному уравнению Ван-дер-Поля — Дуффинга (ср. (12.14))

$$\dot{A} = \frac{1}{2} \left[1 - (\beta + i\gamma)|A|^2 \right] A, \quad (12.28)$$

где

$$\begin{aligned} \beta &= a^2 + 2, \\ \gamma &= \frac{1}{3a}(4a^4 - 7a^2 + 4). \end{aligned} \quad (12.29)$$

Поскольку коэффициенты β и γ положительны, можно сделать следующие выводы. Во-первых, амплитудная нелинейность всегда приводит к насыщению неустойчивости и установлению периодических автоколебаний с постоянной амплитудой $|A| = 1/\sqrt{\beta}$. Во-вторых, фазовая нелинейность приводит к некоторому уменьшению частоты колебаний. Если вернуться к исходным переменным x , y , то видно, что остаются в силе основные свойства суперкритической бифуркации Андронова — Хопфа: амплитуда стационарных колебаний увеличивается пропорционально

$$\varepsilon = \sqrt{b - b_c}. \quad (12.30)$$

На начальной стадии переходного процесса, если начальное возмущение мало, амплитуда растет экспоненциально по закону $\exp[(b-b_c)t/2]$.

Релаксационные автоколебания

При сильной надкритичности ($\lambda \gg 1$) в уравнениях Ван-дер-Поля и Рэля наблюдаются так называемые релаксационные автоколебания. В качестве конкретного примера удобнее взять уравнение Рэля (12.2). Введем новую независимую переменную («медленное время») $\tau = t/\lambda$ и новую зависимую переменную $u = y/\lambda^{3/2}$. Тогда уравнение (12.2) принимает вид

$$\varepsilon u'' - (1 - (u')^2)u' + u = 0, \quad (12.31)$$

где штрихи обозначают дифференцирование по τ , а $\varepsilon = \lambda^{-2} \ll 1$ — малый параметр. Для решения уравнения (12.31), содержащего малый параметр при старшей производной, используем метод разделения быстрых и медленных движений (лекция 10).

Построим качественный фазовый портрет системы, аналогично тому, как это было сделано в лекции 10 для осциллятора с сильной диссипацией. Перепишем уравнение (12.31) в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} u' &= v, \\ \varepsilon v' &= (1 - v^2)v - u. \end{aligned} \quad (12.32)$$

Отсюда следует, что подпространство медленных движений есть кривая

$$u = v - v^3 \quad (12.33)$$

В верхней полуплоскости движение происходит слева направо, в нижней — справа налево (рис. 12.4). Что происходит с фазовой траекторией в точках B и D ? Для ответа на этот вопрос необходимо рассмотреть быстрые движения. Поделив одно уравнение системы (12.32) на другое, найдем уравнение фазовых траекторий

$$\frac{dv}{du} = \frac{(1 - v^2)v - u}{\varepsilon v}. \quad (12.34)$$

Поскольку в знаменателе в правой части (12.34) содержится малый параметр, то вне области медленных движений (12.33) фазовые траектории близки к вертикальным прямым. Следовательно, из точек B и D фазовая траектория скачком переходит с одной ветви медленных движений на другую. Качественно фазовый портрет можно предста-

вить следующим образом (рис. 12.3а): имеется состояние равновесия типа неустойчивый узел в начале координат и устойчивый предельный цикл $ABCD$, состоящий из двух медленных участков AB и CD и двух быстрых — BC и DA . Для сравнения на рис. 12.3б приведен фазовый портрет, полученный путем численного интегрирования. Штриховой линией на рис. 12.3б изображено многообразие медленных движений, построенное согласно формуле (12.33). Видно, что численные результаты достаточно хорошо согласуются с приближенной теорией.

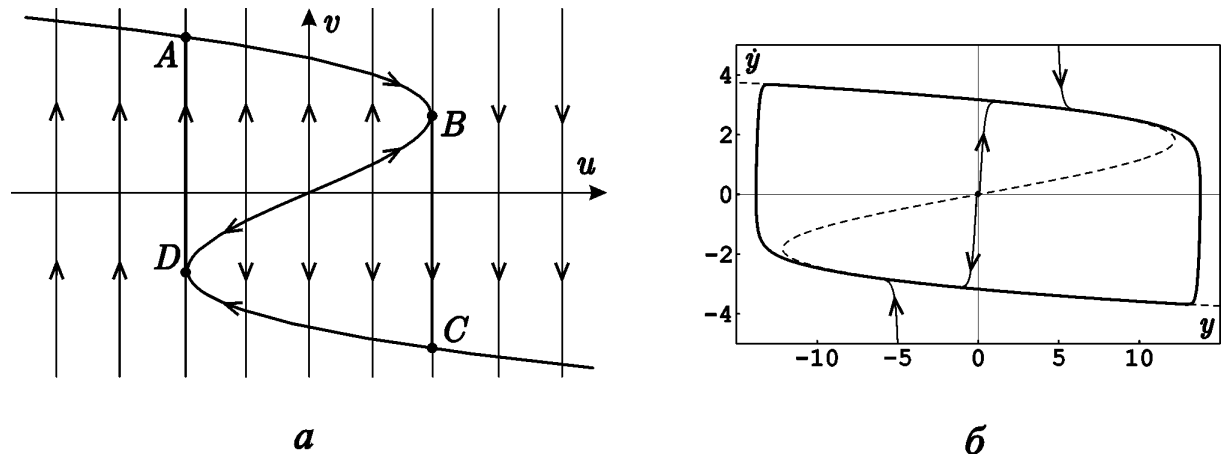


Рис. 12.4. Фазовый портрет уравнения Рэля в случае релаксационных колебаний, построенный на основе приближенного анализа методом разделения быстрых и медленных движений (а) и при помощи численного интегрирования для $\lambda = 10.0$ (б). Штриховой линией показано многообразие медленных движений.

Подсчитаем период колебаний T . Вкладом участков быстрого движения можно пренебречь. Тогда, из первого уравнения системы (12.32) с учетом (12.33) получим

$$d\tau = \frac{du}{v} = \frac{d(v - v^3)}{v}. \quad (12.35)$$

Интегрируя это выражение, найдем, что

$$T = 2 \int_{v_A}^{v_B} \left(\frac{1}{v} - 3v \right) dv = 2 \left(\ln v - \frac{3v^2}{2} \right) \Big|_{v_A}^{v_B}. \quad (12.36)$$

Значение v_B найдем из условия $du/dv|_B = 0$, что дает $v_B = 1/\sqrt{3}$; v_A есть корень уравнения

$$v - v^3 = u_A = -\frac{2}{3\sqrt{3}}. \quad (12.37)$$

Учитывая, что $v_D = -v_B$ является кратным корнем уравнения (12.37), его можно привести к виду

$$(v - v_A)(v - v_B)^2 = 0, \quad (12.38)$$

откуда несложно найти, что $v_A = 2v_B = 2/\sqrt{3}$.

Теперь можно определить период колебаний. Возвращаясь к исходному времени $t = \lambda\tau$, окончательно получаем

$$T = 2\lambda \left(\ln v - \frac{3v^2}{2} \right) \Bigg|_{2/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} = \lambda(3 - 2 \ln 2). \quad (12.39)$$

Отсюда видно, что период релаксационных колебаний нарастает пропорционально λ . Что касается амплитуды колебаний переменной y , то она увеличивается как $\lambda^{3/2}$ (в качестве амплитуды естественно выбрать величину $\lambda^{3/2}u_B = 2\lambda^{3/2}/3\sqrt{3}$).

Автоколебательная система с жестким возбуждением

Рассмотрим генератор на активном элементе с отрицательной дифференциальной проводимостью, вольтамперную характеристику которого можно аппроксимировать следующим образом (рис. 12.5):

$$I(u) = -g_0u - g_2u^3 + g_4u^5 + \dots \quad (12.40)$$

Коэффициенты g_n считаются положительными. Слагаемое с нелинейностью пятого порядка необходимо учесть, чтобы описать эффекты нелинейного ограничения амплитуды колебаний. С учетом (12.40) уравнение (11.12), описывающее колебания генератора, примет вид

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{1}{C}(g_0 + 3g_2u^2 - G - 5g_4u^4) \frac{du}{dt} + \omega_0^2u = 0. \quad (12.41)$$

Вводя новые переменные $\tau = \omega_0 t$, $x = (5g_4)^{1/4} u$, вместо уравнения Ван-дер-Поля (12.1) получим

$$\ddot{x} - (\lambda + \mu x^2 - x^4) \dot{x} + x = 0, \quad (12.42)$$

где $\lambda = (g_0 - G)\sqrt{L/C}$, $\mu = \frac{3g_2}{\sqrt{5g_4}}\sqrt{\frac{L}{C}}$ — безразмерные параметры.

Нетрудно показать, что уравнение (12.42) можно получить и для лампового Ван-дер-Поля в случае, когда рабочая точка выбрана таким образом, что полиномиальная аппроксимация анодно-сеточной характеристики имеет вид

$$i_a = i_0 + S_0 u + S_2 u^3 - S_4 u^5 + \dots \quad (12.43)$$

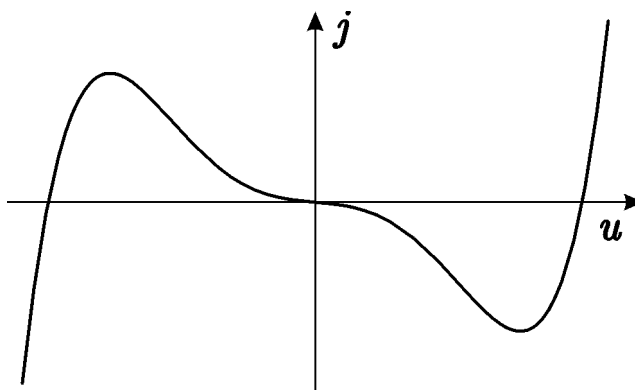


Рис. 12.5. Вольтамперная характеристика активного элемента с отрицательной дифференциальной проводимостью, при которой возможно жесткое возбуждение колебаний.

Условие устойчивости неподвижной точки по-прежнему имеет вид $\lambda < 0$ (т.е. $g_0 < G$). Однако, даже если оно выполнено, автоколебания все же могут возникнуть, если начальное возмущение достаточно велико. Действительно, из уравнения (12.42) видно, что член, пропорциональный μx^2 , представляет своего рода отрицательное затухание (если $\mu > 0$), причем нелинейное. Когда амплитуда начального возмущения превосходит некоторое критическое значение, нелинейное усиление превосходит линейное затухание и колебания начинают нарастать. В таком случае говорят о *жестком возбуждении*. На рис. 12.6 изображен фазовый портрет системы с жестким возбуждением. На фазовой плоскости имеются два аттрактора: состояние равновесия типа устойчивый фокус и устойчивый предельный цикл. Каждый аттрактор имеет свой бассейн притяжения, которые разграничены неустойчивым предельным циклом.

Известный каждому пример автоколебательной системы с жестким возбуждением — это маятниковые часы-ходики. Действительно, после того, как часы заведены, т.е. гиря поднята на необходимую высоту, необходимо сообщить маятнику начальный толчок, чтобы он начал колебаться.

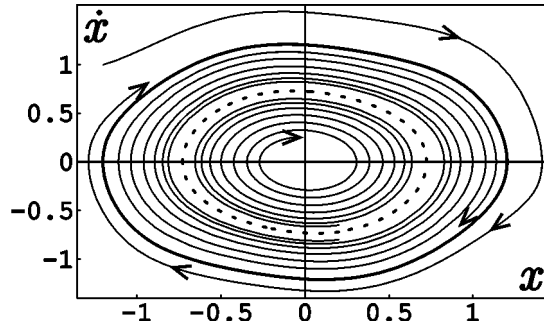


Рис. 12.6. Фазовый портрет автоколебательной системы с жестким возбуждением при $\lambda = -0.1$, $\mu = 1$. Жирной сплошной линией показан устойчивый предельный цикл, пунктирной – неустойчивый.

Проанализируем процесс жесткого возбуждения более подробно, полагая λ и μ малыми. Используем метод Ван-дер-Поля, представив $x(t)$ в виде

$$x = A(t)e^{it} + A^*(t)e^{-it}, \quad (12.44)$$

причем A и A^* связаны соотношением (12.4). Подставив в уравнение (12.42) и проводя усреднение, после не представляющих принципиальной сложности вычислений получаем укороченное уравнение

$$\dot{A} = \frac{1}{2}(\lambda + \mu|A|^2 - |A|^4)A. \quad (12.45)$$

Отсюда следует уравнение для $\rho = |A|^2$ (ср. (12.10))

$$\dot{\rho} = \lambda\rho + \mu\rho^2 - 2\rho^3. \quad (12.46)$$

Найдем неподвижные точки уравнения (12.46). Во-первых имеется неподвижная точка $\rho = 0$, соответствующая нулевому состоянию равновесия исходной системы. Она устойчива при $\lambda < 0$. Кроме того, возможно существование еще двух неподвижных точек

$$\rho_{\pm} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 8\lambda}}{4}. \quad (12.47)$$

Условие их существования, очевидно, имеет вид $-\mu^2/8 < \lambda$ для ρ_+ и $-\mu^2/8 < \lambda < 0$ для ρ_- (напомним, что ρ_{\pm} — величины строго положительные). Анализируя их на устойчивость, можно показать (рекомендуем читателю проделать это самостоятельно), что ρ_+ всегда устойчиво, а ρ_- — неустойчиво. Они соответствуют устойчивому и неустойчивому предельным циклам исходного уравнения (12.42).

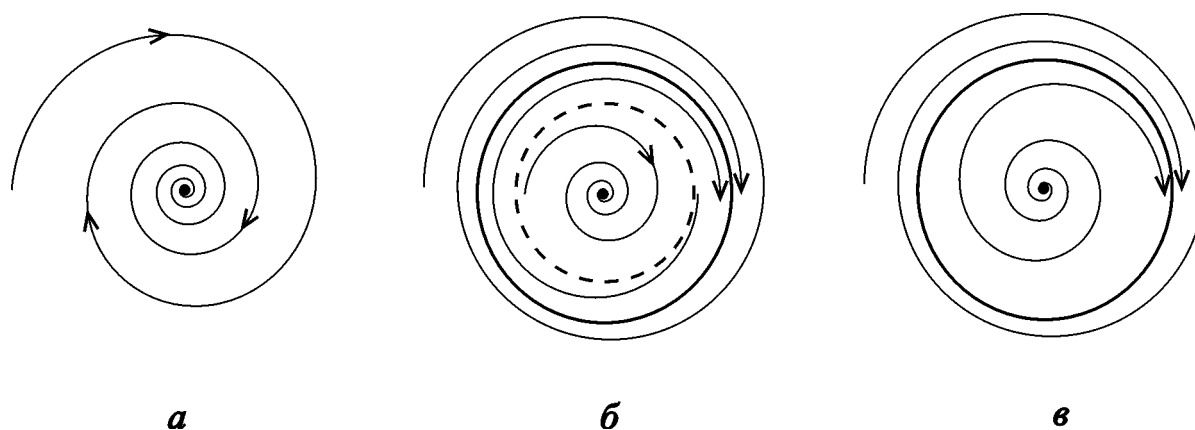


Рис. 12.7. Трансформация фазовых портретов при субкритической бифуркации Андронова — Хопфа: а — $\lambda < -\mu^2/8$; б — $-\mu^2/8 < \lambda < 0$; в — $\lambda > 0$. Неустойчивый предельный цикл показан штриховой линией.

Итак, при увеличении параметра λ фазовый портрет трансформируется следующим образом (рис. 12.7). При $\lambda < -\mu^2/8$ на фазовой плоскости имеется единственное состояние равновесия типа устойчивый фокус (рис. 12.7а). При $\lambda = -\mu^2/8$ происходит рождение пары предельных циклов (устойчивого и неустойчивого) из сгущения фазовых траекторий (рис. 12.7б). С ростом λ устойчивый цикл увеличивается в размерах, а неустойчивый — уменьшается, в соответствии с формулой (12.47). При $\lambda = 0$ неустойчивый предельный цикл исчезает, а состояние равновесия теряет устойчивость. После этого фазовый портрет не имеет качественных отличий от системы с мягким возбуждением: имеется неустойчивое состояние равновесия и устойчивый предельный цикл (рис. 12.7в). Такая бифуркация называется *обратной (субкритической) бифуркацией Андронова — Хопфа*. Термин «субкритический» связан с тем, что предельный цикл появляется до того, как состояние равновесия потеряет устойчивость.

Важно отметить, что в области $-\mu^2/8 < \lambda < 0$ имеет место *бистабильность*, т.е. сосуществование двух устойчивых состояний; в данном случае это неподвижная точка и предельный цикл. Поэтому жесткое возбуждение характеризуется *гистерезисом* (напомним, что бистабильность и гистерезис относятся к числу фундаментальных нелинейных эффектов, см. лекцию 3). Например, если интересоваться самовозбуждением генератора от малых шумовых флуктуаций и считать начальное возмущение малым, то при плавном увеличении λ колебания возникнут при $\lambda = 0$, причем их амплитуда будет сразу иметь конечную величину ($\rho_+ = \mu/2$). Если теперь плавно уменьшать λ , то будет наблюдаться плавное уменьшение амплитуды колебаний до $\rho_+ = \mu/4$, а при

$\lambda = -\mu^2/8$ произойдет срыв генерации. Описанную картину иллюстрирует бифуркационная диаграмма, представленная на рис. 12.8. На ней отложены значения ρ_{\pm} (12.47) в зависимости от параметра λ .

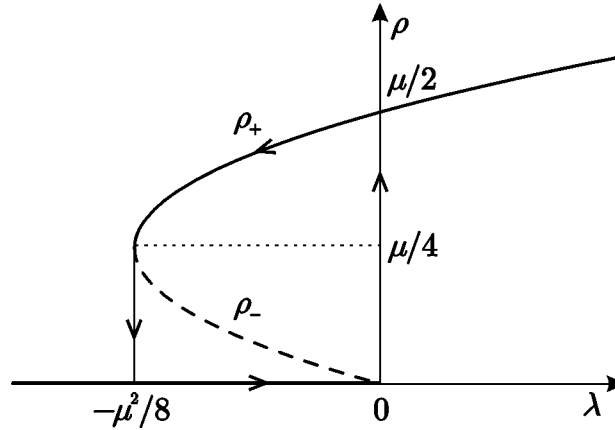


Рис. 12.8. Бифуркационная диаграмма автоколебательной системы с жестким возбуждением.

Задача 12.7. Для модели автогенератора с жестким возбуждением изобразите разбиение плоскости параметров (μ, λ) на области, отвечающие различным возможными типами динамики. Изобразите фазовые портреты для каждой из областей. Укажите устойчивые и неустойчивые предельные множества.

Задача 12.8. Приведите приближенно уравнение $\ddot{x} - (\varepsilon + \cos x)\dot{x} + x = 0$ к традиционной модели автогенератора с жестким возбуждением, и найдите в этом приближении значение параметра ε , отвечающее жесткому возникновению предельного цикла.

Задача 12.9. Для модели автогенератора (12.42) укажите значения параметров, при которых возникающий жестким образом предельный цикл будет иметь заданный размер R .

Задача 12.10. Постройте графики зависимости амплитуды колебаний от параметра λ для $\mu < 0$, $\mu = 0$ и $\mu = 0$. В каком случае наблюдается гистерезис? Покажите, что вблизи точки жесткого перехода зависимость амплитуды от параметра λ имеет корневой характер. На полученных графиках покажите пунктиром зависимость амплитуды неустойчивого предельного цикла от λ .