

## Осциллятор с сильной диссипацией.

### Быстрые и медленные движения

В предыдущей лекции мы сосредоточили свое внимание на системах близких к линейным консервативным. Это позволило представить решение в виде квазигармонических колебаний с медленно меняющимися амплитудой и фазой. Теперь затронем еще один важный класс задач: сильно нелинейные колебания в сильно неконсервативных системах, для которых можно выделить временные интервалы с качественно различным характером изменения переменных — участки быстрых и медленных движений. Типичный пример представляют подобные релаксационные автоколебания (см. рис. 1.1). Более подробно они будут рассмотрены в лекции 11. Здесь же мы продемонстрируем метод приближенного анализа, основанного на разделении быстрых и медленных движений, для осциллятора Дуффинга с сильной диссипацией

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + x + \beta x^3 = 0, \quad (10.1)$$

где  $\gamma$  — большой параметр. Для определенности будем считать  $\beta > 0$  (осциллятор с «жесткой» пружиной, см. лекцию 8).

Введем новое время  $\tau = t/2\gamma$ . Уравнение (10.1) примет вид

$$\varepsilon x'' + x' + x + \beta x^3 = 0, \quad (10.2)$$

где  $\varepsilon = 1/4\gamma^2 \ll 1$  — малый параметр, штрихи обозначают дифференцирование по  $\tau$ . Таким образом, мы получили уравнение, содержащее *малый параметр при старшей производной*. Именно такие системы удобно анализировать при помощи метода разделения быстрых и медленных движений.

**Задача 10.1.** Для линейного колебательного контура, состоящего из последовательно соединенных индуктивности  $L$ , емкости  $C$  и сопротивления  $R$ , получите условие сильной диссипации в явной форме.

### Фазовая плоскость осциллятора с сильной диссипацией

Перепишем уравнение (10.2) в виде системы двух уравнений первого порядка

$$x' = y, \quad (10.3)$$

$$\varepsilon y' = -y - x - \beta x^3 = f(x, y). \quad (10.4)$$

Из уравнения (10.4) видно, что  $y' = f(x, y)/\varepsilon \gg 1$  везде, за исключением области, где функция  $f(x, y)$  близка к нулю. Условие  $f(x, y) = 0$  определяет на плоскости  $(x, y)$  некоторую кривую – кубическую параболу

$$y = -x - \beta x^3. \quad (10.5)$$

Это *подпространство медленных движений* нашей системы. Фактически движение изображающей точки будет медленным не только на этой кривой, но и в ее окрестности ширины  $\varepsilon$ , так что можно говорить и об *области медленных движений*.

Вне области медленных движений, разделив (10.4) на (10.3), найдем уравнение фазовых траекторий

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{\varepsilon y} \gg 1. \quad (10.6)$$

Отсюда видно, что в области быстрых движений фазовые траектории близки к вертикальным прямым.

Таким образом, можно построить качественный фазовый портрет системы (рис. 10.1а). Имеется единственное состояние равновесия типа устойчивый узел, расположенное в начале координат. Изображающая точка вначале быстро выходит в подпространство медленных движений, а затем медленно стремится к положению равновесия. Для сравнения на рис. 10.1б приведен фазовый портрет, рассчитанный численно.

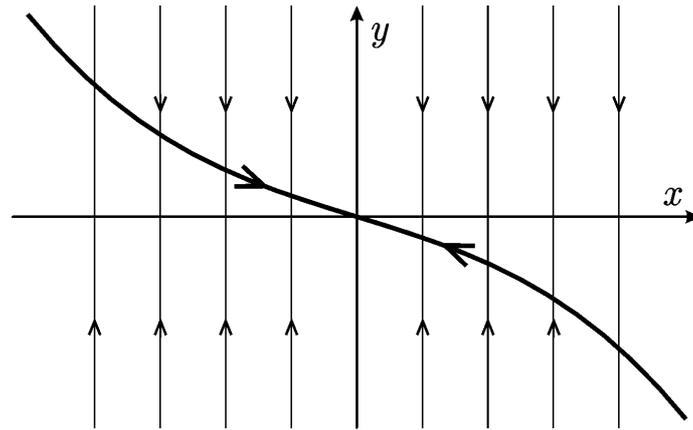
### ***Приближенное решение методом разделения быстрых и медленных движений***

Получим приближенное решение уравнения (10.1), анализируя быстрые и медленные движения по отдельности, а затем «сшивая» полученные решения. В области быстрых движений можно пренебречь двумя последними слагаемыми в правой части (10.4) и записать

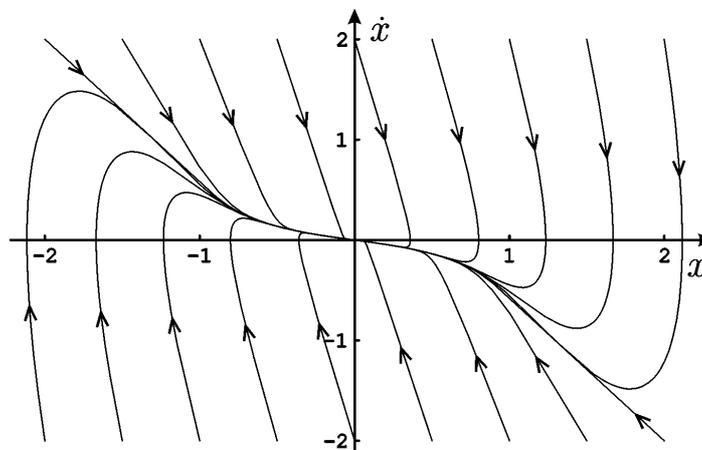
$$\varepsilon y' \approx -y. \quad (10.7)$$

Решение этого уравнения есть

$$y = C_1 \exp(-\tau/\varepsilon). \quad (10.8)$$



а



б

Рис. 10.1 Фазовые портреты осциллятора Дуффинга с сильным затуханием: а — качественный фазовый портрет, жирной линией выделено подпространство медленных движений; б — фазовый портрет, полученный численным интегрированием уравнения (10.1) при  $\gamma = 5$ ,  $\beta = 1$ .

Подставив выражение (10.8) в (10.3), найдем

$$x = C_2 - \varepsilon C_1 \exp(-\tau/\varepsilon). \quad (10.8)$$

Постоянные  $C_{1,2}$  определим из начальных условий. Если положить

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad (10.9)$$

то нетрудно найти, что  $C_1 = y_0$ ,  $C_2 = x_0 + \varepsilon y_0$ . Итак, решение для быстрых движений есть

$$x_{\varepsilon} = x_0 + \varepsilon y_0 [1 - \exp(-\tau/\varepsilon)]. \quad (10.10)$$

Для медленных движений имеем уравнение первого порядка (10.5). Разделив его на  $x^3$ , получим

$$\frac{x'}{x^3} = -\beta - \frac{1}{x^2}. \quad (10.11)$$

Введем вместо  $x$  новую переменную  $u = x^{-2}$ . Тогда уравнение (10.11) примет вид

$$u' = 2(u + \beta). \quad (10.12)$$

Решение уравнения (10.12) легко находится:

$$u = -\beta + C_3 \exp(2\tau). \quad (10.13)$$

Возвращаясь к исходной переменной  $x$ , получаем

$$x_m = \frac{1}{\sqrt{C_3 \exp(2\tau) - \beta}}. \quad (10.14)$$

Теперь необходимо «сшить» решения (10.10) и (10.14). Для этого потребуем, чтобы  $x_m(0) = x_m(\infty) = x_0 + \varepsilon y_0$ . Это позволяет определить постоянную интегрирования  $C_3$ :

$$C_3 = \frac{1}{(x_0 + \varepsilon y_0)^2} + \beta. \quad (10.15)$$

Таким образом, выражение (10.14) принимает вид

$$x_m = \frac{(x_0 + \varepsilon y_0) \exp(-\tau)}{\sqrt{1 + \beta(x_0 + \varepsilon y_0)^2 (1 - \exp(-2\tau))}}. \quad (10.16)$$

Окончательный вид решения будет следующим:  $x = x_0 + x_m - x_m(0)$ . Складывая выражения (10.10) и (10.16), получаем

$$x = -\varepsilon y_0 \exp(-\tau/\varepsilon) + \frac{(x_0 + \varepsilon y_0) \exp(-\tau)}{\sqrt{1 + \beta(x_0 + \varepsilon y_0)^2 (1 - \exp(-2\tau))}}. \quad (10.17)$$

Возвращаясь к исходному времени  $t = 2\gamma\tau$ , запишем (10.17) в виде

$$x(t) = -\frac{y_0 \exp(-2\gamma t)}{4\gamma^2} + \frac{(x_0 + y_0/4\gamma^2) \exp(-t/2\gamma)}{\sqrt{1 + \beta(x_0 + y_0/4\gamma^2)^2 (1 - \exp(-t/\gamma))}}. \quad (10.18)$$

Характерные зависимости  $x(t)$  для различных знаков  $y_0$ , построенные по формуле (10.18), приведены на рис. 10.2 (для определенности мы рассматриваем случай  $x_0 > 0$ ).

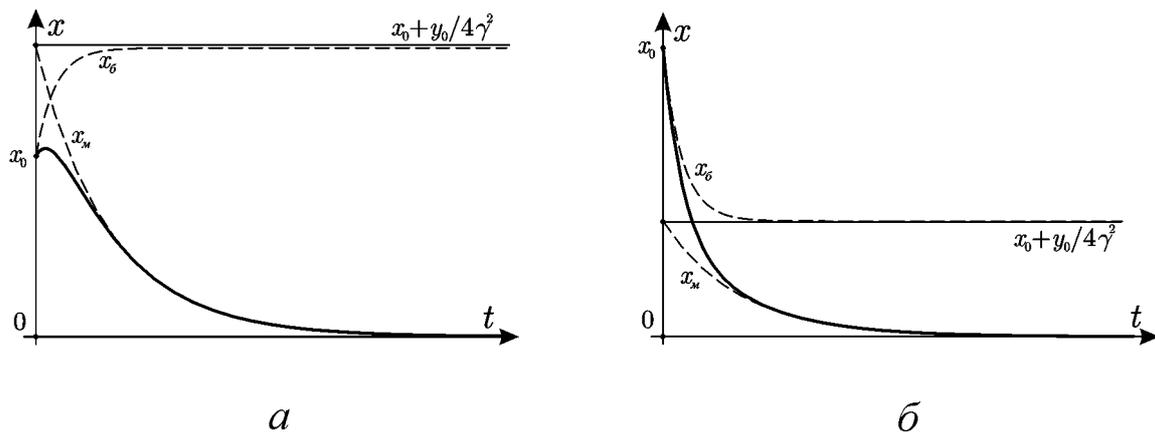


Рис. 10.2. Зависимости  $x(t)$  для осциллятора Дуффинга с сильным затуханием в случаях  $y_0 > 0$  (а) и  $y_0 < 0$  (б). Штриховыми линиями изображены зависимости для  $x_0$  и  $x_m$ .

**Задача 10.2.** Линейный осциллятор с затуханием, находящийся в положении равновесия, получил ударом скорость  $v_0$ . Найдите закон изменения координаты от времени и выполните в полученном соотношении предельный переход к случаю сильной диссипации. Постройте график зависимости координаты от времени и укажите на нем участки быстрого и медленного движения. Покажите, что закон изменения координаты на фазе быстрого движения может быть получен, если в исходном уравнении отбросить инерционный член, а на фазе медленного движения — если отбросить член, соответствующий упругой возвращающей силе.

**Задача 10.3.** Математическому маятнику длины  $l$  и массы  $m$ , находящемуся в покое в положении устойчивого равновесия в среде с сильной вязкостью (сила сопротивления пропорциональна скорости), сообщили ударом достаточно большую скорость  $v_0$ . Найдите зависимость угла отклонения маятника от времени. Оцените максимальный угол отклонения. (*Указания.* Выполните предварительно оценки, которые уточняют понятия “сильная вязкость” и “большая скорость” для данной задачи. Найдите решения, соответствующие фазам быстрого и медленного движений, постройте их суперпозицию и подчините ее начальным условиям.)

Стоит обратить внимание, что метод разделения быстрых и медленных движений имеет много общего с методом многих масштабов. Действительно, метод многих масштабов позволяет получить решение, полностью совпадающее с (10.18). Чтобы убедиться в этом, решим следующую задачу.

**Задача 10.4.** Получите решение уравнения Дуффинга с сильным затуханием (10.1) при помощи метода многих масштабов.

*Решение.* В данном случае удобно ввести новое время несколько иным образом:  $\tau = 2\gamma t$ . При этом уравнение (10.1) приводится к виду

$$x'' + x' + \varepsilon(x + \beta x^3) = 0, \quad (10.19)$$

где  $\varepsilon = 1/4\gamma^2$  — малый параметр. Штрихи, как и ранее означают дифференцирование по  $\tau$ . Будем искать решение уравнения (10.19) в виде ряда по степеням малого параметра

$$x = x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 + \dots \quad (10.20)$$

и введем новые временные масштабы  $T_0 = \tau$ ,  $T_1 = \varepsilon\tau$ , ... (см. лекцию 9). Подставим эти соотношения в уравнение (10.19) и выделим члены одинаковых порядков малости.

В нулевом порядке по  $\varepsilon$  получим уравнение

$$\hat{D}_0^2 x_1 + \hat{D}_0 x_1 = 0. \quad (10.21)$$

Это уравнение для быстрых движений, совпадающее с (10.7). Интегрируя его один раз, получаем

$$\hat{D}_0 x_1 + x_1 = 0. \quad (10.22)$$

Здесь  $B$  — постоянная интегрирования, которая, однако, может зависеть от медленных переменных ( $B = B(T_1)$ ). Повторное интегрирование уравнения (10.22) дает

$$x_1 = B + A \exp(-T_0). \quad (10.23)$$

Здесь  $A$  — также медленноменяющаяся функция.

Члены порядка  $\varepsilon$  в (10.19) приводят к уравнению

$$\hat{D}_0^2 x_2 + \hat{D}_0 x_2 + 2\hat{D}_0 \hat{D}_1 x_1 + \hat{D}_1 x_1 + x_1 + \beta x_1^3 = 0. \quad (10.24)$$

Подставив сюда решение (10.23) для  $x_1$ , найдем

$$\hat{D}_0^2 x_2 + \hat{D}_0 x_2 + \hat{D}_1 B + B + \beta B^3 + [-\hat{D}_1 A + A + 3\beta AB^2] \exp(-T_0) + 3\beta AB^2 \exp(-2T_0) + \beta A^3 \exp(-3T_0) = 0. \quad (10.25)$$

Теперь необходимо ответить на вопрос, какие члены в (10.25) будут приводить к секулярному росту решения для  $x_2$ . Очевидно, это могут быть только члены пропорциональные собственным функциям оператора  $\hat{D}_0^2 + \hat{D}_0$ , т.е. либо члены, пропорциональные  $\exp(-T_0)$ , либо члены, не зависящие от  $T_0$ . Непосредственная проверка показывает, что уравнение

$$\hat{D}_0^2 x_2 + \hat{D}_0 x_2 = C \exp(-T_0) \quad (10.26)$$

имеет решение вида

$$x_2 = C_1 + C_2 e^{-T_0} - CT_0 e^{-T_0}, \quad (10.27)$$

которое остается ограниченным при любых  $T_0$ . В то же время решение уравнения

$$\hat{D}_0^2 x_2 + \hat{D}_0 x_2 = C \quad (10.28)$$

есть

$$x_2 = C_1 + CT_0, \quad (10.29)$$

т.е. нарастает секулярно. Итак, в уравнении (10.25) нужно приравнять к нулю члены, не зависящие от  $T_0$ .

Это приводит к уравнению

$$\hat{D}_1 B + B + \beta B^3 = 0, \quad (10.30)$$

которое совпадает с уравнением для медленных движений (10.4). Его решение с начальным условием  $B(0) = B_0$  запишем в виде (ср. (10.16))

$$B = \frac{B_0 e^{-T_1}}{\sqrt{1 + \beta B_0^2 (1 - e^{-2T_1})}}. \quad (10.31)$$

Подставляя это выражение в (10.23), окончательно находим

$$x_1 = \frac{B_0 e^{-T_1}}{\sqrt{1 + \beta B_0^2 (1 - e^{-2T_1})}} + A e^{-T_0}. \quad (10.32)$$

Вообще говоря, в этой формуле  $A$  также зависит от  $T_1$ . Однако, поскольку на фоне быстрого затухания, пропорционального  $\exp(-T_0)$ , эта зависимость несущественна, можно считать  $A = A_0 = \text{const}$ .

Возвращаясь к исходному времени  $t$ , окончательно получаем

$$x_1 = \frac{B_0 e^{-t/2\gamma}}{\sqrt{1 + \beta B_0^2 (1 - e^{-t/\gamma})}} + A_0 e^{-2\gamma t}. \quad (10.33)$$

Постоянные  $A_0$ ,  $B_0$  определяются из начальных условий. Если считать, что  $x_1(0) = x_0$ ,  $\dot{x}_1(0) = y_0$ , то нетрудно найти, что

$$B_0 = x_0 + \frac{y_0}{4\gamma^2}, \quad A_0 = -\frac{y_0}{4\gamma^2}. \quad (10.34)$$

Теперь видно, что решение (10.33) в точности совпадает с найденным ранее (10.18). Кроме того, метод многих масштабов позволяет продвинуться в более высокие порядки малости и найти поправки к этому решению.