

Лекция 8

Универсальные модели консервативных колебаний вблизи минимума гладкого потенциала: осцилляторы с квадратичной и кубической нелинейностью

Рассматривая нелинейный осциллятор

$$\ddot{x} + f(x) = 0, \quad (8.1)$$

мы вправе выбрать начало отсчета координаты x из соображений удобства. Пусть оно расположено в точке, где функция $f(x)$ обращается в нуль, а потенциал $V(x) = \int f(x)dx$ имеет минимум. Считая функцию гладкой, запишем разложение Тейлора:

$$f(x) = V'(x) = f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 + \dots \quad (8.2)$$

Поскольку в начале координат, по предположению, находится минимум потенциала, мы должны иметь $V''(0) = f'(0) > 0$. Поэтому константу $f'(0)$ имеет смысл обозначить как квадрат некоторого параметра, а именно, $f'(0) = \omega_0^2$. Кроме того, введем обозначения $\frac{1}{2}f''(0) = \alpha$ и $\frac{1}{6}f'''(0) = \beta$; эти величины могут быть положительными, отрицательными или нулевыми.

Если учесть в разложении только первый член, приходим к уравнению *линейного гармонического осциллятора*

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (8.3)$$

Как известно, это универсальная модель для описания в линейном приближении консервативных колебаний малой амплитуды вблизи потенциального минимума. Происхождение универсальности обусловлено просто-напросто тем, что разложение гладкой функции $f(x)$ в ряд Тейлора вблизи нуля в типичном случае начинается с члена первого порядка по x . В разложении потенциальной функции вблизи минимума первым отличным от константы является при этом член второго порядка.

При учете в разложении Тейлора двух членов получаем уравнение *осциллятора с квадратичной нелинейностью*

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 = 0, \quad (8.4)$$

потенциальная функция которого содержит члены второй и третьей степени:

$$V(x) = \frac{1}{2} \omega_0^2 x^2 + \frac{1}{3} \alpha x^3.$$

Ясно, что осциллятор с квадратичной нелинейностью — это универсальная модель, применимая для описания консервативных колебаний в такой ситуации, когда амплитуда колебаний в потенциальной яме не столь мала, чтобы можно было ограничиться линейным приближением в разложении функции $f(x)$, но и не столь велика, чтобы стали существенными последующие члены разложения Тейлора. В таких случаях мы будем говорить о *слабой нелинейности*.

Рассмотренная модель, однако, заведомо непригодна в одном широко распространенном случае, когда потенциал симметричный. Если $V(-x) = V(x)$ и, соответственно, $f(-x) = -f(x)$, то коэффициент α обращается в нуль. Поэтому для учета влияния нелинейных эффектов необходимо принять во внимание следующий, кубический член. Мы приходим к другой универсальной модели, *осциллятору с кубической нелинейностью*:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0. \quad (8.5)$$

Его потенциальная функция содержит члены второй и четвертой степени:

$V(x) = \frac{1}{2} \omega_0^2 x^2 + \frac{1}{4} \beta x^4$ и удовлетворяет постулированному условию симметрии. В литературе осциллятор с кубической нелинейностью называют также *осциллятором Дуффинга*.

Задача 8.1. Считая, что в описанных ниже системах нелинейность является слабой, представьте их уравнения движения в форме осциллятора с нелинейностью степени n

$$\ddot{x} + \omega_0^2 (x + \mu x^n) = 0$$

Определите в каждом случае константы μ и n .

- Массивное колесо с моментом инерции I может вращаться вокруг оси, проходящей через центр колеса (рис. 8.1). На ободе колеса укреплен груз массы m на расстоянии R от оси.

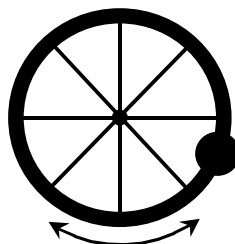


Рис. 8.1.

- Сосуд объемом $2V_0$ разделен подвижным поршнем площади S на две равные части (рис. 8.2). Начальное давление газа p_0 . При колебаниях поршня процесс в газе считать адиабатическим. Масса поршня равна m .

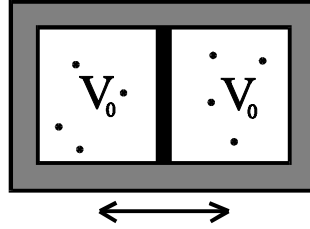


Рис.8.2

- Резиновый жгут натянут с силой F . Посередине жгута прикреплен шарик массы m (рис. 8.3). Шарик может совершать лишь поперечные колебания. Жгут подчиняется закону Гука, его длина в ненапрянутом состоянии l_0 , коэффициент жесткости k . Колебания происходят в невесомости.

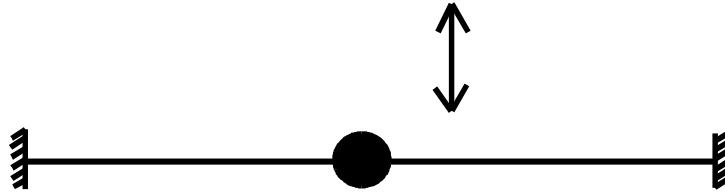


Рис.8.3

Задача 8.2. Шарик массы m подвешен в поле тяжести на пружине, зависимость упругой силы которой от деформации имеет вид $F = kx + cx^3$, где k и c — положительные коэффициенты. Получите уравнение, описывающее колебания шарика около положения равновесия и покажите, что оно содержит как кубическую, так и квадратичную нелинейности. Выясните условия, при которых свойства пружины линейны и колебания также линейны; свойства пружины нелинейны, а колебания линейны; колебания нелинейны.

Приведение уравнений к безразмерному виду

Пусть мы имеем осциллятор с квадратичной нелинейностью, описываемый уравнением (8.4), и пусть для определенности нас интересует вопрос о поведении решений, отвечающих запуску в начальный момент $t = 0$ из заданной точки x_0 с нулевой скоростью:

$$x|_{t=0} = x_0, \quad \dot{x}|_{t=0} = 0. \quad (8.6)$$

Глядя на уравнение (8.4), можно было бы думать, что для получения исчерпывающего представления о динамике, например, с привлечением компьютера, потребуется исследовать зависимость решений от трех параметров ω_0 , α , x_0 , т.е. предпринять весьма

громоздкое исследование с кропотливым перебором огромного числа вариантов. Оказывается, можно радикально упростить как само исследование, так и последующий анализ полученных данных, если использовать простой, но чрезвычайно плодотворный и общий прием, о котором принято говорить как о *приведении уравнений к безразмерному виду*.

Введем новые переменные, X и τ , которые отличаются от присутствующих в уравнении (8.4) координаты и времени только масштабом:

$$x = AX, t = B\tau, \quad (8.7)$$

где A и B — пока неопределенные постоянные. Подстановка в уравнение (8.4) и в начальное условие (8.6) тогда дает

$$\frac{A}{B^2} \frac{d^2 X}{d\tau^2} + A\omega_0^2 X + \alpha A^2 X^2 = 0, \quad AX|_{\tau=0} = x_0, \quad A\dot{X}|_{\tau=0} = 0 \quad (8.8)$$

или

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} + \omega_0^2 B^2 X + \alpha AB^2 X^2 = 0, \quad X|_{\tau=0} = x_0/A, \quad \dot{X}|_{\tau=0} = 0. \quad (8.9)$$

Теперь подберем постоянные A и B так, чтобы по возможности сделать присутствующие в уравнении коэффициенты равными единице. Поскольку в нашем конкретном случае этих постоянных две, можно наложить два условия, а именно,

$$\omega_0^2 B^2 = 1, \quad \alpha AB^2 = 1. \quad (8.10)$$

Отсюда находим

$$B = 1/\omega_0, \quad A = \omega_0^2/\alpha. \quad (8.11)$$

Окончательно можно переписать уравнение с начальными условиями в виде

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} + X + X^2 = 0, \quad X|_{\tau=0} = x_0\alpha/\omega_0^2, \quad \dot{X}|_{\tau=0} = 0. \quad (8.12)$$

Новая постановка задачи содержит всего лишь один безразмерный параметр $X_0 = x_0\alpha/\omega_0^2$, представляющий собой комбинацию, составленную из параметров исходной задачи. Теперь достаточно исследовать поведение решения уравнения (8.4) в зависимости от этого единственного параметра. Если имеем две системы, характеризующиеся разными значениями параметров ω_0 , α , x_0 , но одинаковым X_0 , то их динами-

ка будет подобной в том смысле, что все величины, относящиеся к одной системе, можно получить из величин, относящихся к другой, надлежащим пересчетом масштаба. Параметр X_0 , следовательно, является для нашей задачи *критерием подобия*.

Эта идея служит основой *физического моделирования*. Для того, чтобы выяснить детали поведения системы, описываемой определенными уравнениями, но сложной, дорогой или недоступной для прямого экспериментирования, мы можем провести исследование специально изготовленной модели, отличающейся, например, размерами, весом, использованными материалами, и т.д. Если критерии подобия для системы и модели совпадают, то должны соответствовать и детали динамики.

Для осциллятора с кубической нелинейностью нетрудно проделать аналогичные преобразования. Подставляя (8.7) в уравнение (8.5), получим

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} + X + \frac{\beta A^2}{\omega_0^2} X^3 = 0. \quad (8.13)$$

Подбирая A , мы можем добиться обращения коэффициента перед кубическим членом в единицу, если $\beta > 0$ и в минус единицу, если $\beta < 0$. Таким образом, для осциллятора с кубической нелинейностью мы опять-таки получаем уравнение, не содержащее свободных параметров, но при этом возникает две возможности, требующих отдельного рассмотрения.

Первый случай отвечает тому, что при смещении от положения равновесия нелинейность способствует *увеличению* возвращающей силы. В механической интерпретации это осциллятор с пружиной, делающейся более жесткой при большей деформации («жесткая пружина»). Уравнение записывается в виде

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} + X + X^3 = 0, \quad (8.14)$$

а потенциальная функция $V(x) = \frac{1}{2} X^2 + \frac{1}{4} X^4$ имеет единственный минимум в начале координат.

Второй случай имеет место, когда при смещении от равновесия нелинейность способствует *уменьшению* возвращающей силы. В механической интерпретации это пружина, делающейся более мягкой с ростом деформации («мягкая пружина»). Уравнение имеет вид

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} + X - X^3 = 0, \quad (8.15)$$

а потенциальная функция $V(x) = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{4}X^4$ характеризуется наличием минимума в начале координат и двух симметрично расположенных максимумов по сторонам.

В силу универсальности введенных моделей, стоит обсудить их более подробно по отдельности.

Задача 8.3. Шарик массы m , несущий положительный заряд q , может без трения скользить по непроводящей спице (рис.8.4).

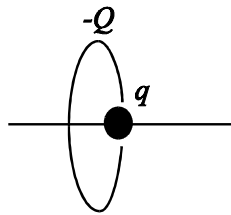


Рис. 8.4.

Спица проходит через центр неподвижного кольца перпендикулярно его плоскости. Кольцо несет отрицательный заряд $-Q$. Радиус кольца равен R . Представьте эту систему в виде модели нелинейного осциллятора с кубической нелинейностью. Какие особенности динамики системы такая модель передает верно, а какие нет?

Задача 8.4. Какими универсальными моделями теории колебаний можно пользоваться для описания систем из задачи 8.1?

Задача 8.5. Молекула может совершать колебательные движения в поле, заданном потенциалом Леннарда-Джонса (см. задачу 5.4). Покажите, что ее малые колебания описываются уравнением осциллятора с квадратичной нелинейностью.

Осциллятор с квадратичной нелинейностью

Построим фазовый портрет осциллятора с квадратичной нелинейностью

$$\ddot{x} + x + x^2 = 0. \quad (8.16)$$

В дальнейшем мы будем без дополнительных оговорок пользоваться уравнением именно в этой форме. График зависимости силы от смещения имеет вид параболы (рис.8.5а), а график потенциальной функции $V(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$ – вид кубической параболы (рис.8.5б). В начале координат имеется локальный минимум функции $V(x)$, где будет

будет располагаться особая точка типа центр. При $x = -1$ потенциальная функция имеет максимум, и здесь находится особая точка седло (рис.8.5в).

Сепаратриса делит фазовую плоскость на три области. Соответственно, имеется три разных топологических типа траекторий.

1) Замкнутые траектории, располагающиеся внутри образованной сепаратрисой петли, охватывающей центр. Они соответствуют финитным движениям – колебаниям вблизи локального минимума потенциала (рис.8.6а).

2) Незамкнутые траектории, расположенные слева от сепаратрисы. Они отвечают движениям по левому склону потенциального рельефа с уходом на минус бесконечность на больших временах (рис.8.6б).

3) Незамкнутые траектории, расположенные справа от сепаратрисы. Им соответствуют движения, которые захватывают, как левый склон потенциального рельефа, так и область ямы, но энергия слишком велика, чтобы произошел захват в области минимума потенциала. На больших временах происходит также уход на минус бесконечность (рис.8.6в).

Можно получить точные аналитические решения уравнения осциллятора с квадратичной нелинейностью в эллиптических функциях (лекция 7). Если умножить обе части уравнения (8.16) на \dot{x} , то можно один раз проинтегрировать полученное выражение и получить первый интеграл (интеграл энергии)

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + V(x) = E, \quad (8.17)$$

где E — полная энергия. Понятно, что физический смысл имеют только финитные движения внутри потенциальной ямы. Им соответствуют значения $0 < E < 1/6$.

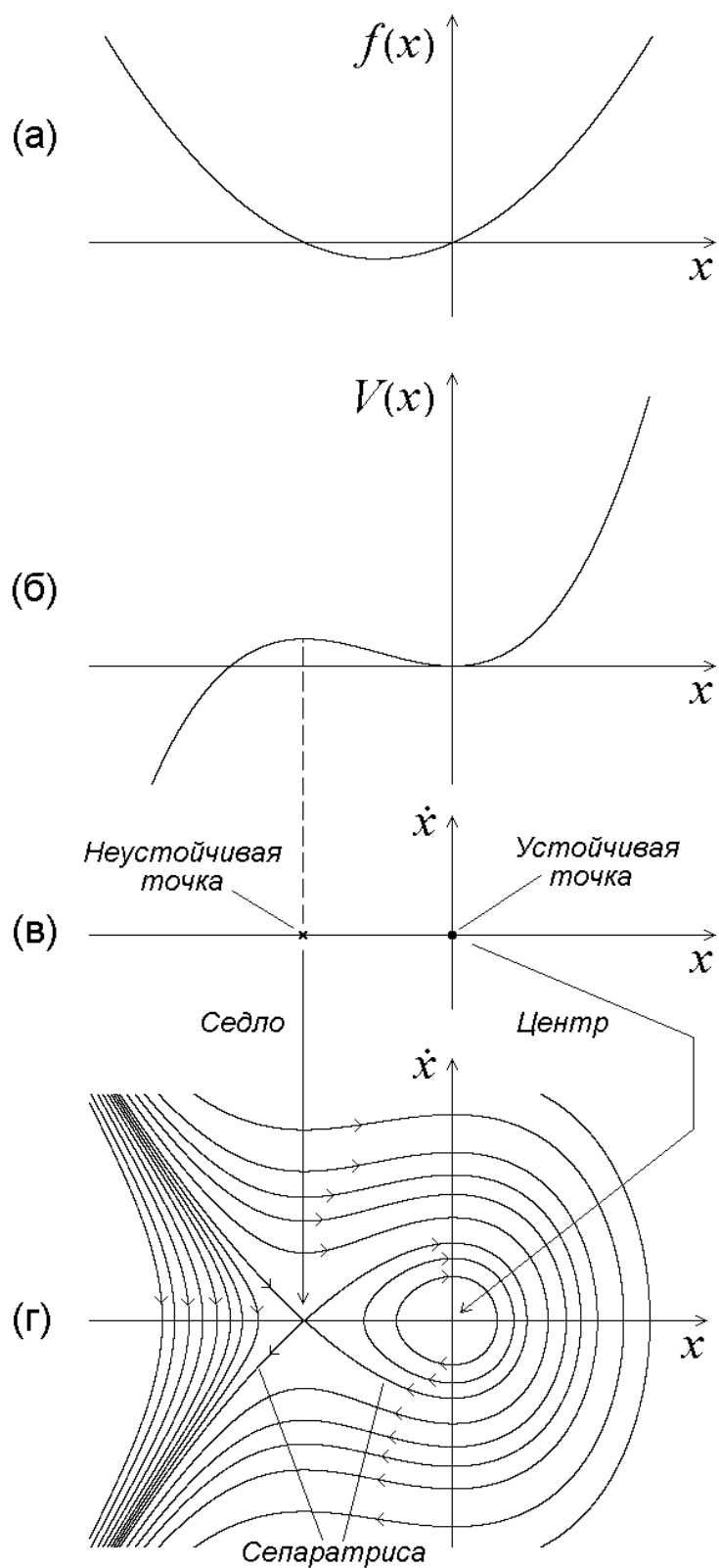


Рис.8.5. Зависимость силы от координаты (а), потенциальная функция (б), расположение особых точек (в) и фазовый портрет (г) для осциллятора с квадратичной нелинейностью.

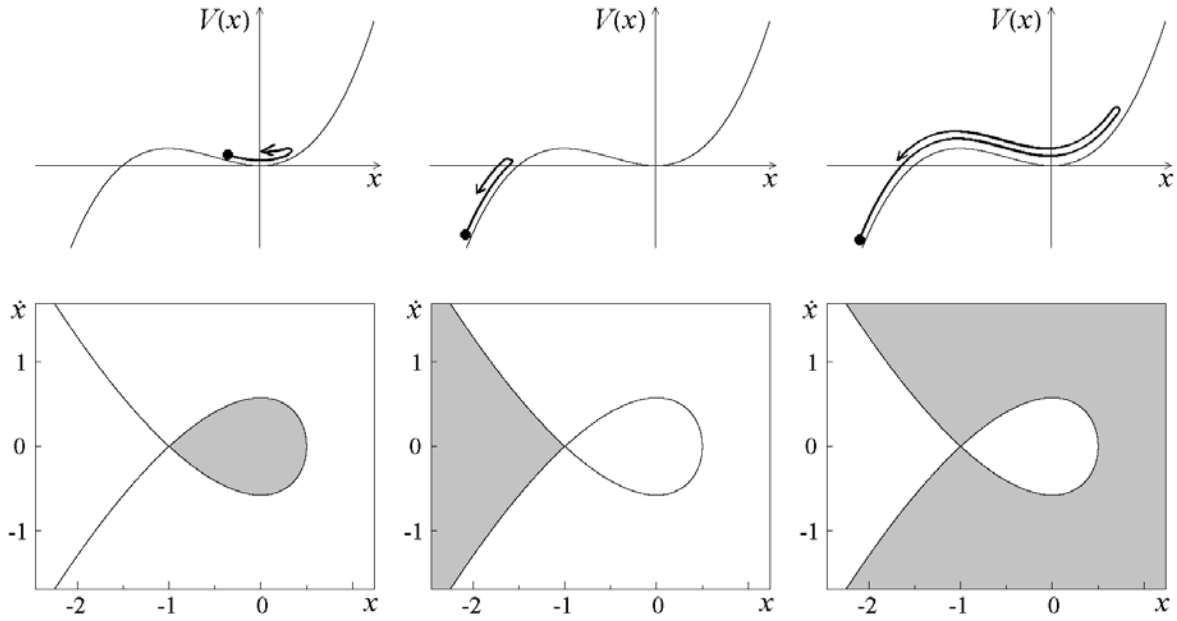


Рис.8.6. Различные типы движений для осциллятора с квадратичной нелинейностью и соответствующие области на фазовой плоскости, занимаемые траекториями определенного топологического типа.

Выражая \dot{x} из (8.17) и разделяя переменные, получаем

$$dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}}. \quad (8.18)$$

Подкоренное выражение в правой части (8.18) представляет собой полином с тремя нулями, которые обозначим как x_0 , x_1 и x_2 (рис. 8.7), причем колебания происходят в области $x_1 \leq x \leq x_0$. Начальное условие поставим в виде (8.6). Тогда $E = x_0^2/2 + x_0^3/3$. После не представляющих принципиальной сложности вычислений можно найти, что

$$x_{1,2} = \frac{-(2x_0 + 3) \pm \sqrt{(2x_0 + 3)^2 - 8x_0(2x_0 + 3)}}{4} \quad (8.19)$$

и привести выражение (8.18) к виду

$$dt = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(x_0 - x)(x - x_1)(x - x_2)}}. \quad (8.20)$$

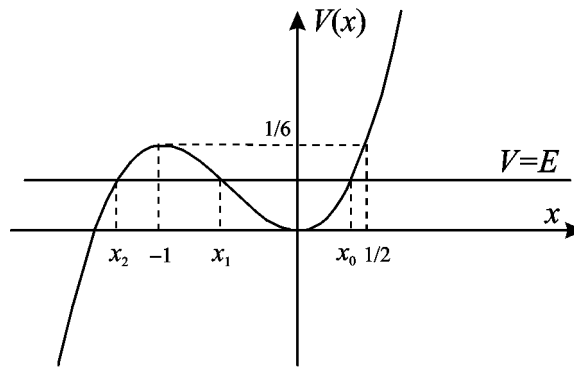


Рис. 8.7. К решению уравнения осциллятора с квадратичной нелинейностью (8.16).

Сделаем замену

$$x(t) = x_1 + a \cos^2 \varphi(t), \quad (8.21)$$

где $a = x_0 - x_1$. При изменении φ от 0 до $\pi/2$ переменная x изменяется от x_0 до x_1 .

Нетрудно подсчитать, что

$$\begin{aligned} x_0 - x &= a \sin^2 \varphi, \\ x - x_1 &= a \cos^2 \varphi, \\ x - x_2 &= x_0 - x_2 - a \sin^2 \varphi, \\ dx &= -a \sin 2\varphi d\varphi. \end{aligned} \quad (8.22)$$

С учетом этих соотношений уравнение (8.02) принимает вид

$$dt = \mp \sqrt{\frac{6}{x_0 - x_2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (8.23)$$

где

$$m^2 = \frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_2}. \quad (8.24)$$

Очевидно, что всегда выполняется условие $0 \leq m^2 \leq 1$.

Используя введенные в лекции 7 эллиптические интегралы и эллиптические функции Якоби, нетрудно проинтегрировать уравнение (8.23) и найти выражение для периода колебаний

$$T = 2 \sqrt{\frac{6}{x_0 - x_2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \varphi}} = 2 \sqrt{\frac{6}{x_0 - x_2}} K(m), \quad (8.25)$$

а также зависимости $\varphi(t)$ и $x(t)$:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \operatorname{am}\left(\sqrt{\frac{x_0 - x_2}{6}}t; m\right), \\ x(t) &= x_1 + a \operatorname{cn}^2\left(\sqrt{\frac{x_0 - x_2}{6}}t; m\right).\end{aligned}\tag{8.26}$$

Для слабонелинейных колебаний вблизи дна потенциальной ямы можно приближенно считать, что $x_0 \approx a/2$, $x_1 \approx -a/2$, $x_2 \approx -3/2$, $a \ll 1$ (см. рис. 8.3). Следовательно, будем иметь $m \ll 1$, $K(m) \approx \pi/2$. Тогда из формул (8.25), (8.26) видно, что период колебаний близок к периоду линейного осциллятора, $T \approx 2\pi$, и

$$x \approx x_1 + a \cos^2(t/2) = \frac{a}{2} \cos t.\tag{8.27}$$

Здесь мы учли, что при малых значениях модуля эллиптические функции приближенно переходят в тригонометрические (соотношения (7.33)).

При m , близком к единице выражения (8.26) описывают сильно нелинейные периодические колебания, называемые иногда *кноидальными* (поскольку решение выражается через эллиптический косинус Якоби — кноиду).

Наконец, для движения по сепаратрисе имеем $x_{1,2} = -1$, $x_0 = 1/2$, $m = 1$ (см. рис. 8.7). В этом случае эллиптические функции выражаются через гиперболические (формулы (7.34)) и выражение (8.26) дает

$$x = -1 + \frac{3}{2 \operatorname{ch}^2(t/2)}.\tag{8.28}$$

Характерные осциллограммы колебаний (т.е. зависимости $x(t)$) в различных случаях приведены на рис. 8.8.

Задача 8.6. Получите решение (8.28) для движения по сепаратрисе непосредственно из исходного уравнения (8.16), не переходя к эллиптическим функциям Якоби. Учтите, что при этом $E = 1/6$.

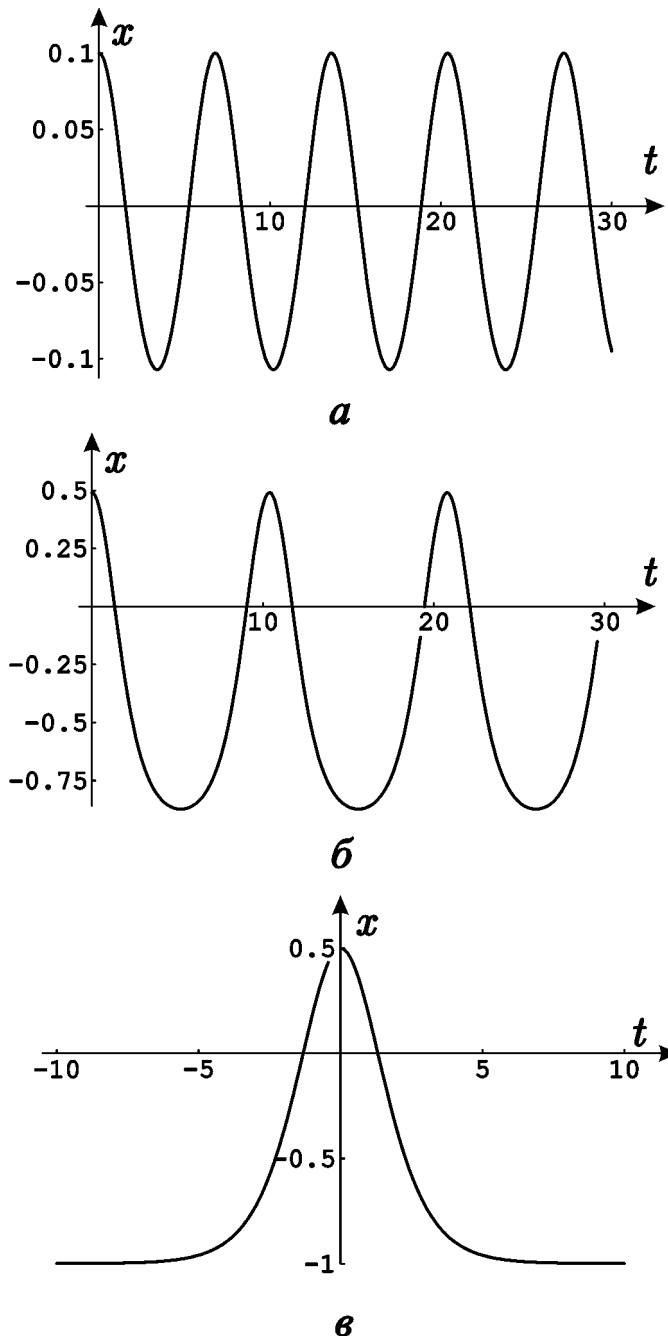


Рис. 8.8. Характерные осциллограммы колебаний осциллятора с квадратичной нелинейностью: а — квазигармонические колебания; б — кноидальные колебания; в — движение по сепаратрисе.

Осциллятор с кубической нелинейностью (осциллятор Дуффинга)

Перейдем к осциллятору с кубической нелинейностью. Как было указано, следует различать два случая, которые в механической интерпретации соответствуют «жесткой» и «мягкой» пружине.

В первом случае записываем уравнение

$$\ddot{x} + x + x^3 = 0. \quad (8.29)$$

График зависимости силы от смещения имеет вид кубической параболы (рис. 8.9а), а график потенциальной функции $V(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$ – вид симметричной кривой с единственным минимумом в начале координат (рис. 8.9б). Там будет располагаться особая точка типа центр, других особых точек нет (рис. 8.9в). На фазовом портрете (рис. 8.9г) имеется единственный тип траекторий – замкнутые орбиты, охватывающие центр и соответствующие периодическим колебаниям.

Выберем начальные условия в виде (8.6), так что $E = x_0^2/2 + x_0^4/4$. Тогда из закона сохранения энергии будем иметь

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2(E - V(x))} = \pm \sqrt{(x_0^2 - x^2) \left(1 + \frac{x_0^2 + x^2}{2}\right)}. \quad (8.30)$$

Осуществляя замену

$$x(t) = x_0 \cos \varphi(t) \quad (8.31)$$

и разделяя в (8.30) переменные, приведем это соотношение к виду

$$dt = \mp \frac{1}{\sqrt{1+x_0^2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (8.32)$$

где

$$m^2 = \frac{x_0^2}{2(1+x_0^2)}. \quad (8.33)$$

Колебания, очевидно, происходят в пределах $-x_0 \leq x \leq x_0$, при этом φ изменяется от нуля до 2π . Интегрируя выражение (8.32) по замкнутой фазовой траектории, находим период колебаний

$$T = \frac{4}{\sqrt{1+x_0^2}} K(m). \quad (8.34)$$

При $x_0 \ll 1$, что соответствует движению вблизи дна потенциальной ямы, имеем $T \approx 4K(0) = 2\pi$. При $x_0 \gg 1$ модуль эллиптического интеграла стремится к $1/\sqrt{2}$ и из выражения (8.34) можно получить

$$T \approx \frac{4}{x_0} K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \quad (8.35)$$

Таким образом, с ростом амплитуды период колебаний стремится к нулю как x_0^{-1} . Не-трудно также найти зависимость $x(t)$. Из соотношения (8.32) получаем, что

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \operatorname{am}\left(\sqrt{1+x_0^2}t; m\right), \\ x(t) &= x_0 \operatorname{cn}\left(\sqrt{1+x_0^2}t; m\right). \end{aligned} \quad (8.36)$$

Перейдем теперь ко второму случаю — осциллятору с «мягкой» пружиной

$$\ddot{x} + x - x^3 = 0. \quad (8.37)$$

График зависимости силы от смещения имеет вид кубической параболы с тремя нулями (рис.8.10а), а график потенциальной функции $V(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4$ — два симметрично расположенных максимума, между которыми имеется локальный минимум в начале координат (рис.8.10б). В точках максимума будут находиться особые точки типа седло, а между ними, в точке минимума — особая точка типа центр (рис.8.10в). Как и для осциллятора с квадратичной нелинейностью, на фазовой плоскости (рис.8.10в) можно выделить различные типы траекторий. Замкнутые траектории соответствуют периодическим колебаниям внутри потенциальной ямы. При этом полная энергия может принимать значения в диапазоне $0 \leq E \leq 1/4$. Область колебательных движений ограничена сепаратрисами, идущими из седла в седло. Незамкнутые фазовые траектории соответствуют инфинитному движению, когда происходит уход на бесконечность. Будем далее интересоваться только колебательными движениями.

Из закона сохранения энергии вместо (8.30) получаем уравнение

$$\dot{x} = \pm \sqrt{(x_0^2 - x^2) \left(1 - \frac{x_0^2 + x^2}{2}\right)}. \quad (8.38)$$

Осуществляя замену

$$x(t) = x_0 \sin \varphi(t), \quad (8.39)$$

после несложных преобразований получим

$$dt = \mp \frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (8.40)$$

где

$$m^2 = \frac{x_0^2}{2-x_0^2}. \quad (8.41)$$

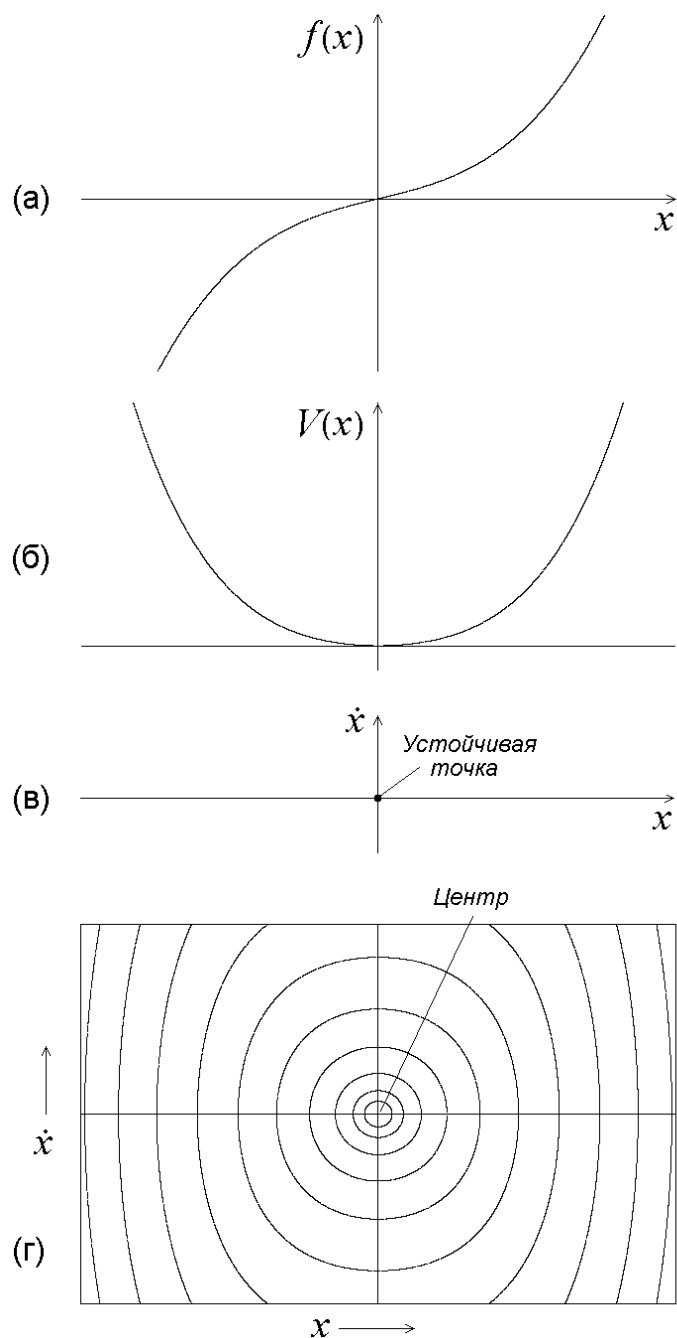


Рис. 8.9. Зависимость силы от координаты (а), потенциальная функция (б), расположение особых точек (в) и фазовый портрет (г) для осциллятора с кубической нелинейностью («жесткая пружина»)

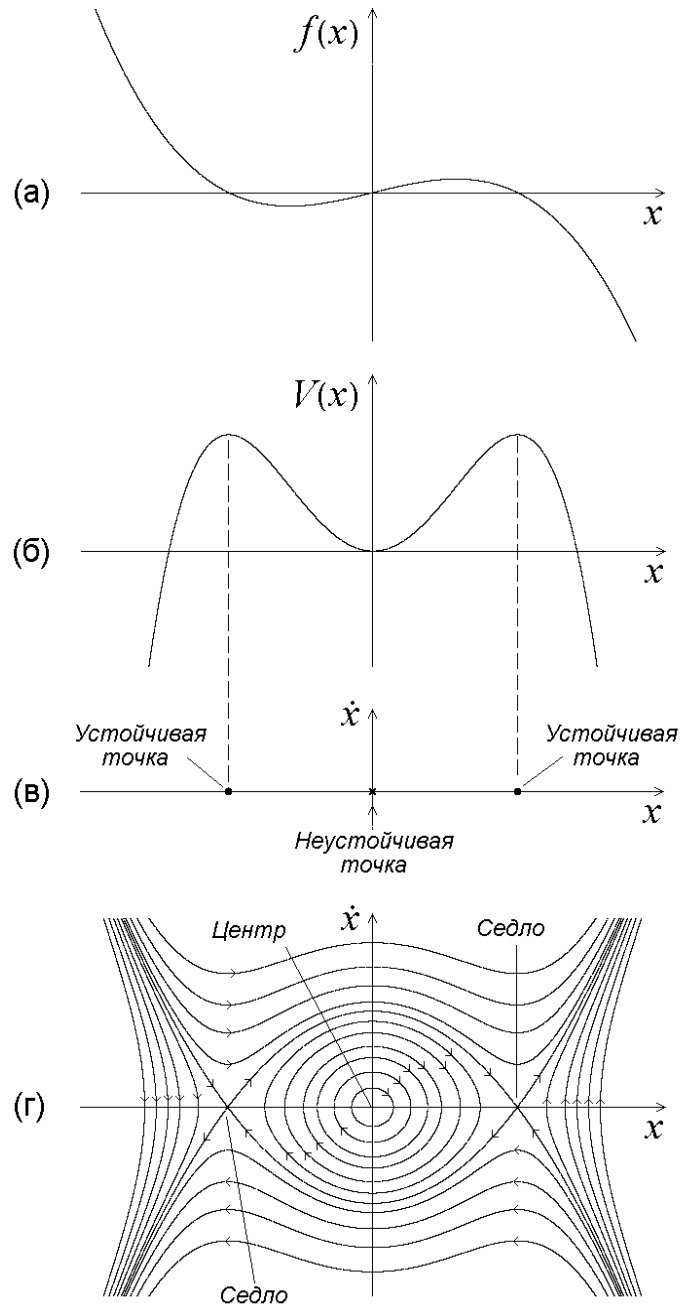


Рис. 8.10. Зависимость силы от координаты (а), потенциальная функция (б), расположение особых точек (в) и фазовый портрет (г) для осциллятора с кубической нелинейностью (случай «мягкой пружины»).

Из уравнения (8.40) можно найти период колебаний

$$T = \frac{4}{\sqrt{1-x_0^2/2}} K(m). \quad (8.42)$$

В данном случае с ростом амплитуды колебаний период увеличивается. При $x_0 = 1$, что соответствует движению по сепаратрисе, имеем $m^2 = 1$, и, как следует из формулы (8.42), период колебаний стремится к бесконечности.

Зависимость $x(t)$ имеет вид

$$x = x_0 \operatorname{sn}\left(\sqrt{1-x_0^2/2} t; m\right). \quad (8.43)$$

По-прежнему нетрудно убедиться, что при $x_0 \ll 1$ это выражение описывает слабонелинейные квазигармонические колебания. При $x_0 = 1$ с учетом формул (7.34) получаем выражение, описывающее движение по сепаратрисе

$$x = \pm \operatorname{th}\left(t/\sqrt{2}\right). \quad (8.43)$$

Здесь мы учли два знака, соответствующие двум сепаратрисам, идущим из седла в седло.

Задача 8.7. Осциллятор с кубической нелинейностью, описываемый уравнением (8.37), совершает колебательное движение вблизи сепаратрисы. Оцените период колебаний. Начальное значение координаты x_0 , а начальная скорость равна нулю. Решение проведите по аналогии с задачей 7.2.

Задача 8.8. Найдите приближенно спектр скорости для осциллятора с кубической нелинейностью, совершающего колебательное движение вблизи сепаратрисы.

Осциллятор с кубической нелинейностью — потенциал с двумя ямами

В заключение рассмотрим ещё один частный случай осциллятора с кубической нелинейностью

$$\ddot{x} - x + x^3 = 0. \quad (8.44)$$

Потенциальная энергия такого осциллятора

$$V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 \quad (8.45)$$

— так называемый потенциал с двумя ямами (рис. 8.11а). В данном случае в состоянии равновесия $x = 0$ потенциальная функция имеет локальный максимум, так что это состояние равновесия неустойчиво (особая точка типа седло). Кроме того, имеются два локальных минимума при $x = \pm 1$, которым соответствуют устойчивые точки типа центр. На фазовом портрете (рис. 8.11б) существуют замкнутые фазовые траектории двух различных типов, разделенные сепаратрисами. В первом случае колебания осцил-

лятора локализованы внутри одной из потенциальных ям, во втором осциллятор поочередно переходит из одной ямы в другую.

Рассмотрим сначала колебания внутри сепаратрисной петли. При этом полная энергия лежит в пределах $-1/4 < E < 0$. Как видно из рис. 8.11а, колебания происходят в области $x_1 < x < x_0$, причем $1 \leq x_0 \leq \sqrt{2}$ (для определенности мы ограничиваемся правой ямой, где $x_{0,1} > 0$). Здесь $x_{0,1}$ — корни уравнения $V(x) = E$. Нетрудно показать, что $x_1^2 = 2 - x_0^2$. В данном случае получить точные решения в эллиптических функциях удастся при помощи несколько более сложной замены

$$x^2 = x_1^2 + (x_0^2 - x_1^2) \cos^2 \varphi. \quad (8.46)$$

Мы предоставляем читателю самому проделать необходимые выкладки и убедиться, что

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \operatorname{am}(x_0 t / \sqrt{2}; m), \\ x(t) &= \pm \sqrt{x_1^2 + (x_0^2 - x_1^2) \operatorname{cn}^2(x_0 t / \sqrt{2}; m)}, \end{aligned} \quad (8.47)$$

где $m^2 = (x_0^2 - x_1^2) / x_0^2 = 2(x_0^2 - 1) / x_0^2$, причем период колебаний определяется выражением

$$T = \frac{2\sqrt{2}}{x_0} K(m). \quad (8.48)$$

При $x_0 \approx 1$, когда колебания происходят вблизи дна потенциальной ямы, из уравнения (8.48) имеем $T \approx \pi\sqrt{2}$. Проверьте полученный результат, линеаризовав уравнение (8.44) вблизи устойчивого положения равновесия и подсчитав частоту линейных колебаний. С ростом энергии период колебаний растет и при $E = 0$ (т.е. $x_0 = \sqrt{2}$), что соответствует движению по сепаратрисе, обращается в бесконечность.

Решение, описывающее движение по сепаратрисе, можно получить, полагая в формуле (8.47) $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{2}$, $m = 1$. С учетом соотношений (7.33) это дает

$$x = \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{ch} t}. \quad (8.49)$$

Теперь рассмотрим движение вне сепаратрисной петли ($E > 0$). В этом случае, полагая

$$x = x_0 \cos \varphi, \quad (8.50)$$

можно прийти к решению

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \operatorname{am}\left(\sqrt{x_0^2 - 1} t; m\right), \\ x(t) &= x_0 \operatorname{cn}\left(\sqrt{x_0^2 - 1} t; m\right), \end{aligned} \quad (8.51)$$

причем

$$m^2 = \frac{x_0^2}{2(x_0^2 - 1)}. \quad (8.52)$$

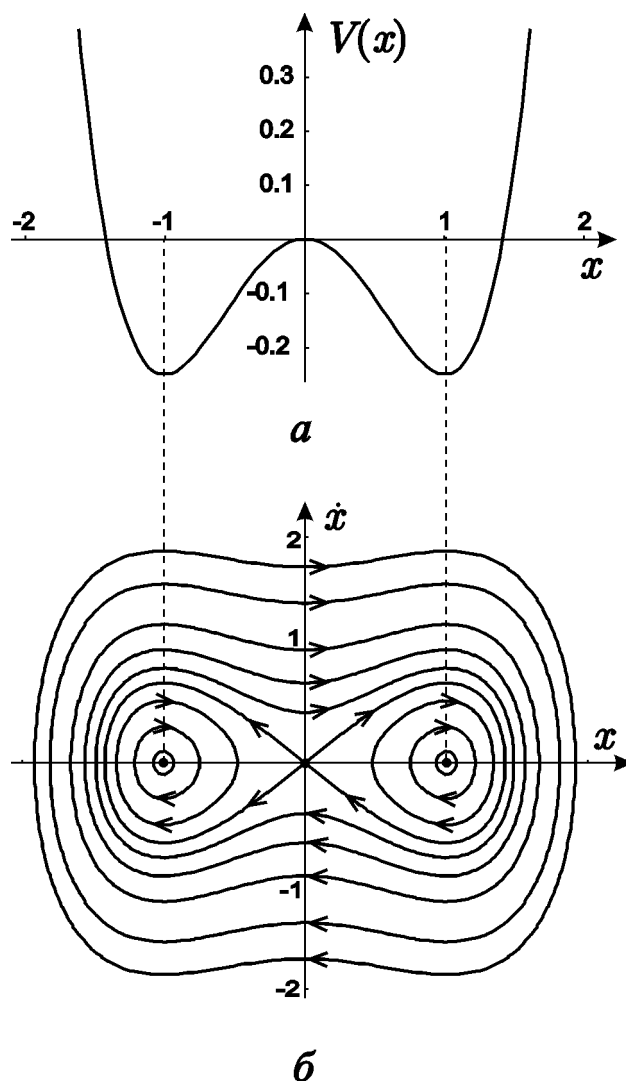


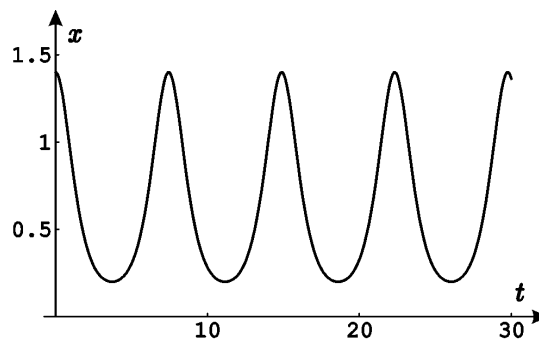
Рис. 8.11. Потенциальная энергия (а) и фазовый портрет (б) осциллятора (8.44)

Напомним, что теперь $x_0 > \sqrt{2}$. Выражение (8.47) описывает знакопеременные периодические колебания, которые иногда называют сверхнелинейными.

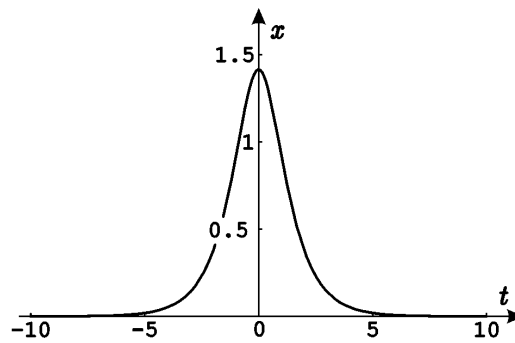
Период колебаний теперь равен

$$T = \frac{4K(m)}{\sqrt{x_0^2 - 1}} \quad (8.53)$$

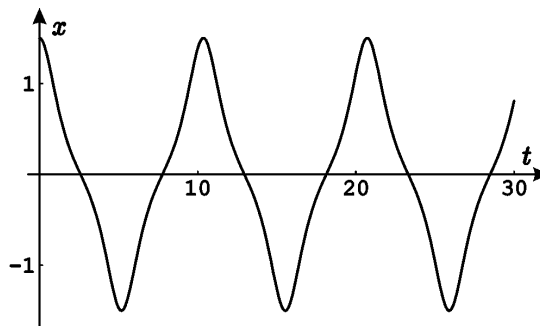
Нетрудно видеть, что с ростом x_0 период убывает и при $x_0^2 \gg 1$ стремится к $4K(1/\sqrt{2})/x_0 \rightarrow 0$.



a



б



в

Рис.8.12. Колебания осциллятора (8.44): а — сильно нелинейные колебания внутри потенциальной ямы; б — движение по сепаратрисе; в — сверхнелинейные колебания.

На рис. 8.12 приведены примеры осциллограмм, иллюстрирующие различные типы колебаний.

Задача 8.9. Маятник в верхнем положении равновесия прикреплен к пружине (см. задачу 3.10) с нелинейной зависимостью удлинения x от приложенной силы F : $F = kx + cx^3$, где k и c — положительные коэффициенты. Угол отклонения маятника от вертикали мал, длина стержня l , масса шарика m . Какой из универсальных моделей нелинейного осциллятора следует пользоваться при $lk > mg$ и при $lk < mg$? Получите уравнения соответствующих моделей в явном виде, оцените поправку к частоте и величину смещения центра колебаний относительно положения равновесия. Амплитуда колебаний равна A .