

Лекция 7

Осциллятор с нелинейностью синуса: аналитический подход к нелинейной задаче

Из примеров, приведенных в предыдущей лекции, мы видели, что уравнение осциллятора с нелинейностью синуса описывает колебания математического и физического маятника. Замечательно, что аналогичное уравнение возникает и в ряде других задач, например, при рассмотрении контакта Джозефсона, при исследовании самоиндуцированной прозрачности в нелинейной оптике, при анализе изгиба упругой балки (так называемая аналогия Кирхгофа).

Тот факт, что уравнение маятника охватывает множество различных задач, заставляет видеть в осцилляторе с нелинейностью типа синуса своего рода эталонную модель, заслуживающую подробного исследования. Более того, данное уравнение оказывается интересным и богатым объектом с точки зрения связанных с ним математических идей и результатов. Это одна из проблем, стимулировавших разработку теории эллиптических функций и эллиптических интегралов математиками XVIII и XIX веков (Эйлер, Абель, Якоби, Вейерштрасс и другие).

В этой лекции мы сначала коротко расскажем о названных выше задачах, приводящих к уравнению маятника, а затем обратимся к его аналитическому исследованию, опирающемуся на использование эллиптических функций.

Мораль данной лекции такова, что даже в современную компьютерную эпоху аналитический подход к решению задач не стоит сбрасывать со счетов. (Более того, он, очевидно, обретает новую жизнь с появлением мощных компьютерных систем аналитических вычислений, таких как Mathematica и Maple.)

Контакт Джозефсона

Пусть имеем два куска сверхпроводника, разделенных узким промежутком, который заполнен «нормальным» (не сверх-) проводником (рис. 7.1). Это известный *контакт Джозефсона*. Как мы увидим, анализ этой системы, приводит к уравнению осциллятора с нелинейностью синуса.

Согласно теории сверхпроводимости, в сверхпроводнике носители заряда – электроны взаимодействуют друг с другом, и это взаимодействие приводит к их попарному связыванию с образованием квази-частиц, так называемых куперовских пар. (Один из наиболее распространенных механизмов – взаимодействие через посредство механических колебаний кристаллической решетки – фононов). Куперовская пара относится к бозе-частицам, которые при наличии большого их числа имеют тенденцию скапливаться в

Лекция 7

одном и том же квантовом состоянии, описываемом общей волновой функцией. («Чем нас больше соберется, тем нам будет веселей».) В разумном приближении волновую функцию куперовских пар в каждом куске сверхпроводника можно считать просто комплексной величиной, изменяющейся во времени, но не зависящей от координат в пределах куска. Пусть в первом и втором куске волновая функция, дается, соответственно комплексными числами, ψ_1 и ψ_2 , а энергия в расчете на одну квазичастицу, соответственно, E_1 и E_2 . Согласно уравнению Шредингера,

$$\begin{aligned} i\hbar \partial \Psi_1 / \partial t &= E_1 \Psi_1, \\ i\hbar \partial \Psi_2 / \partial t &= E_2 \Psi_2. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Полагая $\Psi_{1,2} \sim \exp(i\varphi_{1,2})$, получаем

$$\begin{aligned} -\dot{\varphi}_1 &= E_1 / \hbar, \\ -\dot{\varphi}_2 &= E_2 / \hbar, \end{aligned} \quad (7.2)$$

Вычтем второе уравнение (7.2) из первого. Принимая во внимание, что разность энергий определяется умноженной на заряд куперовской пары $2e$ разностью потенциалов $V = V_1 - V_2$ (напряжение на контакте), имеем

$$\dot{\varphi} = 2e\hbar^{-1}V, \quad (7.3)$$

где $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Это первое существенное для нас уравнение. Оно показывает, что скорость изменения разности фаз между волновыми функциями в двух кусках сверхпроводника пропорциональна разности электрического потенциала между ними.

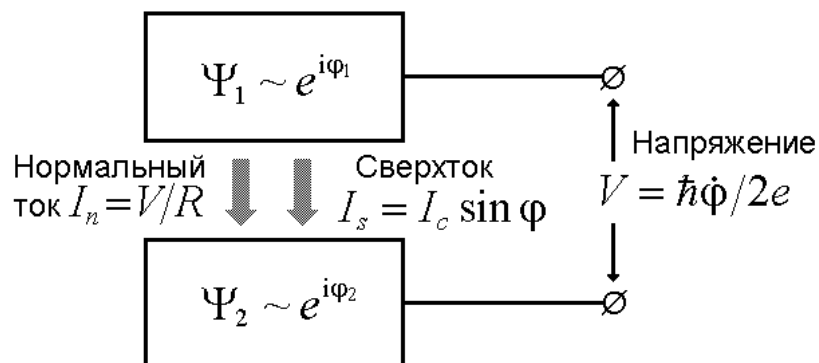


Рис. 7.1. Схема контакта Джозефсона: два куска сверхпроводника разделены промежутком из несверхпроводящего материала.

Ток носителей заряда из одного куска в другой складывается из двух частей. Во-первых, это нормальный ток, пропорциональный разности потенциалов и сопротивлению контакта $I_n = R^{-1}V$, и, во-вторых, это так называемый *сверхток* – ток куперовских пар, который оказывается пропорциональным синусу разности фаз:

$$I_s = I_c \sin \varphi. \quad (7.4)$$

Здесь коэффициент I_c есть постоянная величина, характеризующая данный конкретный контакт, — так называемый критический ток.

Обозначая через C емкость конденсатора, образованного рассматриваемыми двумя кусками сверхпроводника, можно написать уравнение, связывающее разность потенциалов и полный ток через контакт:

$$C\dot{V} + I_n + I_s = 0 \quad (7.5)$$

или

$$\dot{V} + V/RC + I_c C^{-1} \sin \varphi = 0. \quad (7.6)$$

Подставляя сюда соотношение, выражающее напряжение через скорость изменения разности фаз (7.3), получаем окончательно

$$\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}/RC + (2eI_c/\hbar C) \sin \varphi = 0. \quad (7.7)$$

Это уравнение совпадает по виду с уравнением маятника при наличии диссипации. Роль динамической переменной играет разность фаз волновых функций в двух кусках сверхпроводника. Обычные физические величины, — напряжение и ток, выражаются через нее посредством соотношений (7.3) и (7.4). В предельном случае, когда нормальный ток пренебрежимо мал, и обмен электрическим зарядом между кусками определяется исключительно сверхтоком куперовских пар, приходим к консервативному осциллятору с нелинейностью синуса.

Задача о самоиндуцированной прозрачности

В общей постановке задача о самоиндуцированной прозрачности при распространении оптического излучения в нелинейной среде подразумевает исследование пространственно-временных зависимостей соответствующих величин. К уравнению нелинейного осциллятора она приводит в том случае, если пространственные распределения можно считать неизменными и отслеживать только временные зависимости.

Предположим, что имеется резонатор, в котором может возбуждаться одна мода колебаний электромагнитного поля на определенной частоте ω_0 с фиксированной пространственной структурой. Амплитуда колебаний может медленно изменяться во времени благодаря взаимодействию поля со средой, заполняющей резонатор. Среда состоит из атомов с двумя энергетическими уровнями, разность энергий между которыми $\Delta E = \hbar\omega_0$, где \hbar — постоянная Планка, а ω_0 — частота перехода, которая предполагается точно совпадающей с собственной частотой моды резонатора.

Электрическое поле в резонаторе представляется в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left(E(t) \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) e^{i\omega_0 t} \right), \quad (7.8)$$

где $E(t)$ — медленно меняющаяся амплитуда, а $\mathbf{E}_s(\mathbf{r})$ характеризует распределение в пространстве поля рабочей моды резонатора. Считаем, далее, что вектор поляризации активной среды, — дипольный момент единицы объема, характеризуется таким же пространственным распределением,

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left(P(t) \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) e^{i\omega_0 t} \right). \quad (7.9)$$

Кроме того, введем величину, характеризующую мгновенную разность населенностей уровней

$$D(t) = N_2 - N_1, \quad (7.10)$$

Лекция 7

где N_1 и N_2 — число атомов, пребывающих в данный момент, соответственно, на нижнем и верхнем энергетическом уровне.

Сконструируем уравнения, описывающие динамику во времени величин E , P и D в пренебрежении всеми диссипативными процессами. Выпишем сначала уравнение возбуждения резонатора. В левой части будет стоять производная от амплитуды поля \dot{E} , а в правой — член, пропорциональный поляризации P , который отвечает за возбуждение поля атомами среды:

$$\dot{E} = \beta P, \quad (7.11)$$

β — некоторая постоянная. Второе уравнение, имеющее в левой части производную \dot{P} , описывает изменение поляризации среды. В правой части будет присутствовать член, происхождение которого можно пояснить следующим образом. Дипольный момент, который приобретает каждый атом среды в присутствии электрического поля, пропорционален величине поля и зависит от того, на каком энергетическом уровне находится атом. Поэтому средний вклад в поляризацию будет пропорционален произведению амплитуды поля и разности населенностей. Таким образом, второе уравнение имеет вид

$$\dot{P} = cED, \quad (7.12)$$

где c — постоянная. Наконец, третье уравнение описывает изменение разности населенностей и имеет вид

$$\dot{D} = -kEP, \quad (7.13)$$

где k — постоянный коэффициент. Умножим уравнение для поляризации (7.12) на kP , а уравнение для населенности (7.13) на cD , и сложим их. Тогда получаем $\frac{d}{dt}(kP^2 + cD^2) = 0$. Отсюда следует, что $kP^2 + cD^2 = R$, где R — константа, определяемая начальными условиями. Выполнение последнего соотношения будет обеспечено, если положить $P = -\sqrt{R/k} \sin \phi$, $D = -\sqrt{R/c} \cos \phi$, где ϕ — новая неизвестная функция времени. Подставляя эти выражения в уравнения (7.11) и (7.12), получаем

$$\dot{E} = -\beta\sqrt{R/k} \sin \phi, \quad (7.14)$$

$$\dot{\phi} = \sqrt{ck}E. \quad (7.15)$$

Дифференцируя уравнение (7.15) по времени и подставляя (7.14), приходим к уравнению консервативного осциллятора с нелинейностью синуса:

$$\ddot{\phi} = -\beta\sqrt{cR} \sin \phi. \quad (7.16)$$

Аналогия Кирхгофа

Рассмотрим длинную упругую балку, удерживаемую в изогнутом положении продольной силой F , приложенной к краям, как показано на рис. 7.2. (Балка — принятый в механике термин, но на самом деле объектом, подходящим для экспериментов в домашних условиях, может служить, например, стальная линейка.) Какую форму она может принимать в зависимости от параметров задачи, в том числе, от величины приложенной силы?

Не вдаваясь здесь в детали, составляющие предмет механики сплошных сред и теории упругости, поясним происхождение основных уравнений. В любой точке (x, y) локальная кривизна линейки дается производной от угла наклона θ по отсчитываемой вдоль линейки координате s . Скорость же изменения кривизны по длине балки пропорциональна изгибающему моменту — произведению силы F на плечо y , т.е. $\frac{d\theta}{ds} = -CFy$. Здесь C — коэффициент пропорциональности, зависящий от упругих свойств материала и формы поперечного сечения балки. Дифференцируя это равенство по θ и используя геометрически очевидное соотношение $\frac{dy}{ds} = \sin \theta$, получаем

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = -CF \sin \theta. \quad (7.17)$$

Заметим, что смысл имеют как положительные, так и отрицательные значения параметра CF . (В самом деле, приложенные к концам силы могут быть направлены не только навстречу друг другу, как на рис. 7.2, но и в противоположные стороны.)

Чтобы найти форму изогнутой балки в декартовых координатах (x, y) при численном решении на компьютере целесообразно дополнить задачу уравнениями

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \theta. \quad (7.18)$$

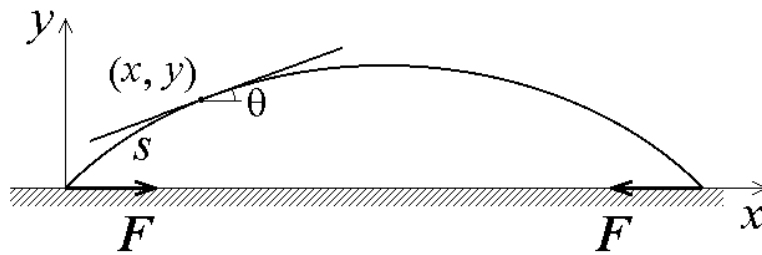


Рис. 7.2. К задаче об изгибе балки.

В отличие от других рассмотренных нами примеров, в данном случае уравнение описывает не эволюцию процесса во времени, а пространственную зависимость — зависимость угла наклона от координаты, отсчитываемой вдоль балки. Еще одна особенность в том, что здесь приходится иметь дело не с задачей Коши, когда начальные условия заданы при одном значении аргумента, а с краевой задачей, когда заданы граничные условия (угол наклона) на *двух* концах балки фиксированной длины, т.е. при $s = 0$ и $s = L$. Тем не менее, само уравнение (7.17) совпадает по форме с уравнением маятника. Если мы разобрались с динамикой маятника, то в силу указанной аналогии уравнений мы можем делать заключения о том, какую форму может принимать балка (линейка) в зависимости от параметров задачи!

Задача 7.1. Возьмите металлическую линейку и сожмите ее за концы так, как показано на рис. 7.2. Нарисуйте на бумаге получившийся профиль. С помощью этого рисунка изобразите экспериментальную зависимость угла θ от длины дуги s . Какому движению маятника отвечает полученный график? Линейны или нелинейны его колебания?

Фазовая плоскость маятника

Перейдем к анализу решений уравнения маятника, которое запишем в простейшем виде, не содержащем внешних параметров

$$\ddot{x} + \sin x = 0. \quad (7.19)$$

Потенциальная энергия маятника определяется выражением $W(x) = -\cos x$. Фазовый портрет представлен на рис. 7.3. Минимумы потенциальной функции располагаются при $x = 2\pi l$ и соответствуют состояниям равновесия типа центр, максимумы — при $x = 2\pi l + \pi$ и отвечают седлам. Как видно из рис. 7.3, можно выделить три качественно разных типа движений и фазовых траекторий:

- а) колебательные движения внутри потенциальной ямы, замкнутые фазовые траектории;
- б) движения по сепаратрисам, идущим из седла в седло;
- в) ротационные движения, т.е. движения с прокручиванием.

Отметим, что в силу того, что фазовый портрет является периодическим по x , фазовые траектории часто изображают на поверхности цилиндра.

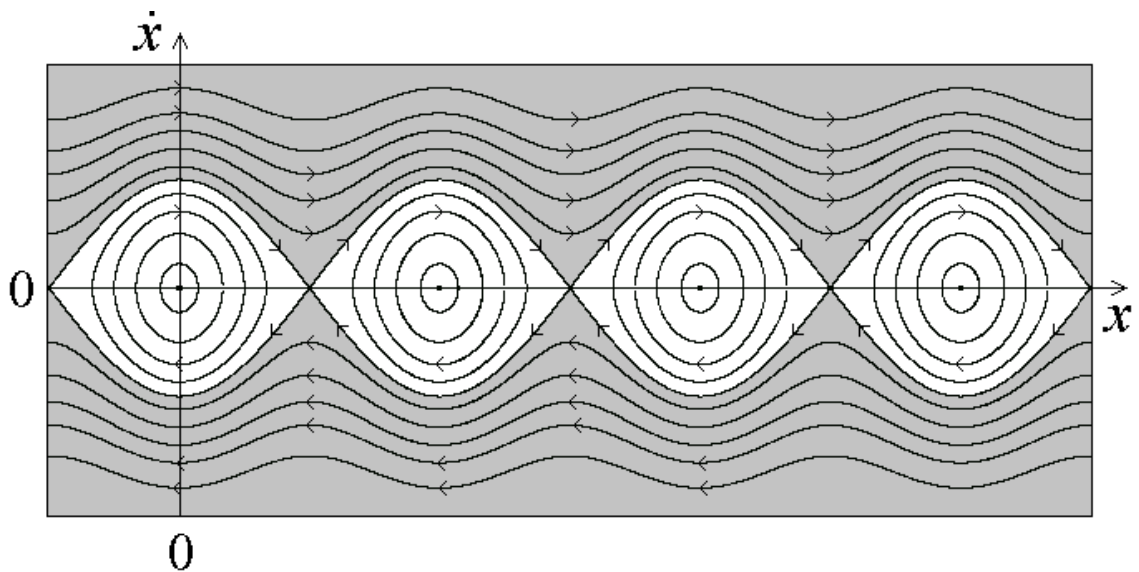


Рис. 7.3. Фазовая плоскость уравнения маятника. Белым цветом обозначены области колебательных движений, серым – ротационных.

Запишем для уравнения (7.19) закон сохранения энергии

$$\frac{\dot{x}^2}{2} - \cos x = E, \quad (7.20)$$

где $E = \text{const}$ — полная энергия. Колебательным движениям соответствуют значения $-1 < E < 1$, ротационным — $E > 1$, движение по сепаратрисе реализуется при $E = 1$. Обсудим эти случаи по отдельности.

Колебательные движения

Рассмотрим задачу со следующими начальными условиями:

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0. \quad (7.21)$$

Тогда $E = -\cos x_0$. Из уравнения (7.20) получим

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2(\cos x - \cos x_0)} = \pm 2\sqrt{\sin^2(x_0/2) - \sin^2(x/2)}. \quad (7.22)$$

Знак «+» соответствует верхней половине фазовой траектории, знак «-» — нижней. Для определенности будем считать $x_0 > 0$ и оставим в выражении (7.22) нижний знак. Введем обозначение

$$m = \sin(x_0/2), \quad (7.23)$$

так что $E = 2m^2 - 1$. Разделяя переменные в (7.22), получаем

$$dt = -\frac{dx}{2\sqrt{m^2 - \sin^2(x/2)}}. \quad (7.24)$$

Сделаем в (7.24) замену $\sin x = m\tau$. Тогда

$$dx = \frac{m d\tau}{\sqrt{1 - m^2 \tau^2}}, \quad (7.25)$$

и уравнение (7.24) принимает вид

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{(1 - \tau^2)(1 - m^2 \tau^2)}}. \quad (7.26)$$

Интегрируя соотношение (7.26), получаем

$$t = \int_0^z \frac{d\tau}{\sqrt{(1 - \tau^2)(1 - m^2 \tau^2)}} = F(z; m). \quad (7.27)$$

Здесь $F(z; m)$ — специальная функция, называемая *неполным эллиптическим интегралом 1-го рода*, $z = \sin(x/2)/m$. Для дальнейшего изложения нам понадобится краткое знакомство с эллиптическими интегралами и эллиптическими функциями Якоби.

Математическое отступление: эллиптические интегралы и эллиптические функции Якоби

Функция

$$F(z; m) = \int_0^z \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-m^2\tau^2)}} \quad (7.28)$$

или

$$F(\varphi; m) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\psi}} \quad (7.29)$$

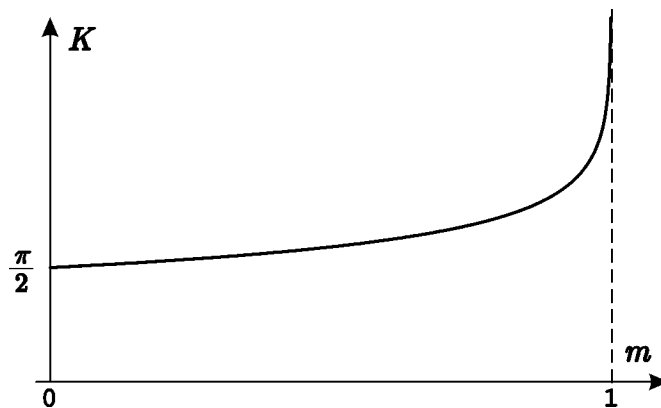
называется *неполным эллиптическим интегралом 1-го рода с модулем m* . Переход от (7.28) к (7.29) осуществляется при помощи замены $z = \sin \varphi$, $\tau = \sin \psi$. При $0 \leq m^2 \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ функция F является вещественной. В дальнейшем будем предполагать эти условия выполненными.

Функция

$$K(m) = F\left(\frac{\pi}{2}; m\right) = \int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-m^2\tau^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\psi}} \quad (7.30)$$

называется *полным эллиптическим интегралом 1-го рода*. График функции $K(m)$ приведен на рис. 7.4.

Из соотношения (7.30) нетрудно видеть, что $K(0) = \pi/2$, $\lim_{m \rightarrow 1} K(m) = \infty$.

Рис. 7.4. График функции $K(m)$.

Пусть мы имеем соотношение

$$F(\varphi; m) = t. \quad (7.31)$$

Функция, обратная $F(\varphi; m)$ называется *амплитудой Якоби*

$$\varphi = \operatorname{am}(t; m). \quad (7.32)$$

Остальные функции Якоби определяются следующим образом:

$\operatorname{sn}(t; m) = \sin \operatorname{am}(t; m)$ — *эллиптический синус* или *синус амплитуды*;

$\operatorname{cn}(t; m) = \cos \operatorname{am}(t; m)$ — эллиптический косинус или косинус амплитуды;

$\operatorname{dn}(t; m) = \sqrt{1 - m^2 \operatorname{sn}^2(t; m)}$ — дельта амплитуды.

Важно отметить, что в двух частных случаях эллиптические функции выражаются через элементарные. При $m = 0$ имеем

$$\operatorname{sn}(t; 0) = \sin t, \operatorname{cn}(t; 0) = \cos t, \operatorname{dn}(t; 0) = 1. \quad (7.33)$$

В другом предельном случае $m = 1$ имеем

$$\operatorname{sn}(t; 1) = \operatorname{th} t, \operatorname{cn}(t; 1) = \operatorname{dn}(t; 1) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}. \quad (7.34)$$

При $0 \leq m^2 \leq 1$ эллиптические функции Якоби периодичны с периодом $4K(m)$. Поэтому удобно построить их графики как функции аргумента $u = t/K(m)$ (рис. 7.5).

Период колебаний маятника

Теперь нетрудно получить выражение для периода колебаний T . С учетом общего выражения для периода

$$T = \oint \frac{dx}{\sqrt{2(E - W(x))}}, \quad (7.35)$$

где интегрирование ведется по всей замкнутой фазовой траектории, используя выражение (7.26), находим, что

$$T = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \psi}} = 4K(m). \quad (7.36)$$

Напомним, что модуль эллиптического интеграла m выражается через полную энергию колебаний

$$m^2 = \frac{E + 1}{2}. \quad (7.37)$$

Таким образом, период колебаний зависит от энергии, т.е. колебания маятника *неизохронны*. При $E = -1$, что соответствует дну потенциальной ямы, имеем $m = 0$ и, следовательно, $T = 2\pi$, что совпадает со значением периода колебаний линейного осциллятора. По мере увеличения энергии период колебаний монотонно возрастает и при $E \rightarrow 1$, т.е. при приближении к сепаратрисе, стремится к бесконечности.

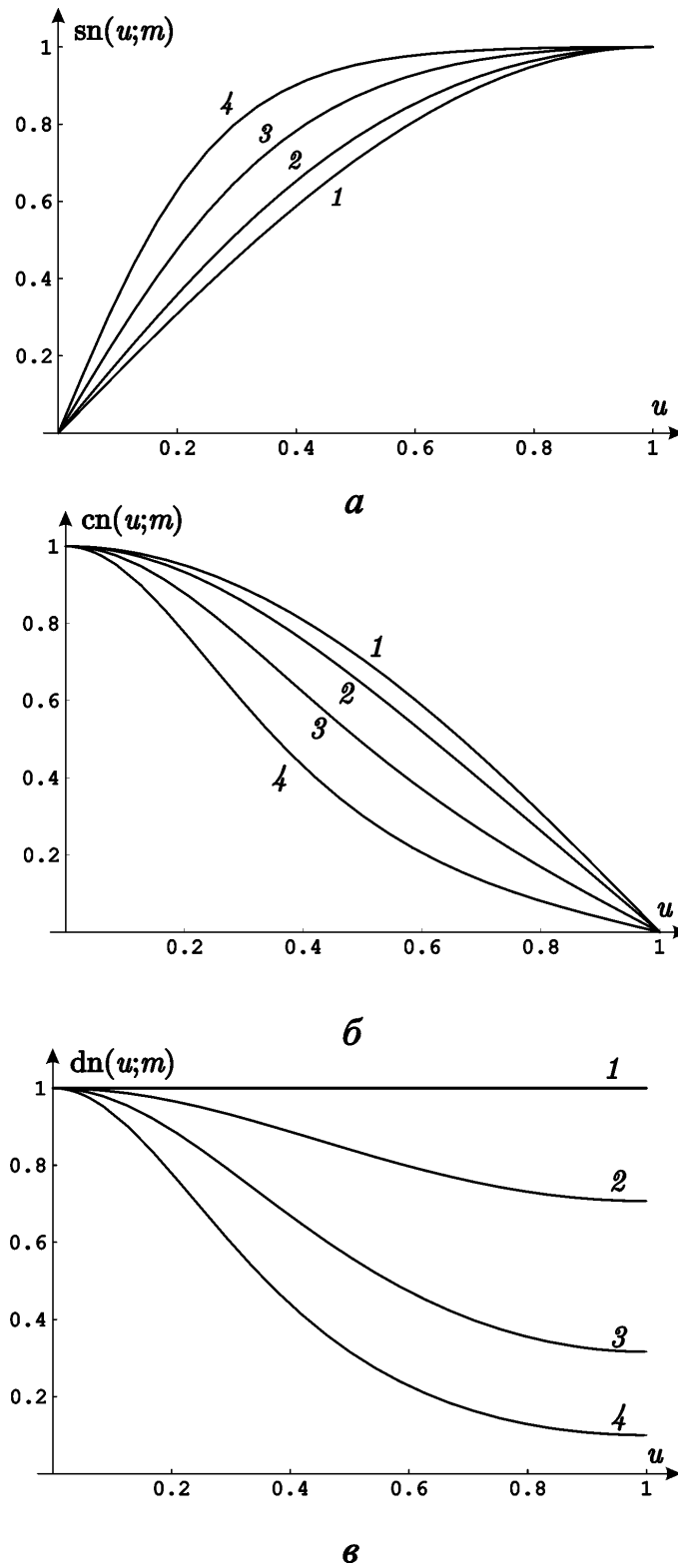


Рис. 7.5. Графики эллиптических функций Якоби. Цифры на рисунках соответствуют различным значениям m : 1 — $m = 0.0$; 2 — $m = 0.5$; 3 — $m = 0.9$; 4 — $m = 0.95$.

Точное решение для колебательных движений

Теперь получим точное решение. Из соотношения (7.27) с учетом определения эллиптических функций находим, что

$$\begin{aligned}\varphi &= \operatorname{am}(t; m), \\ z &= \sin \varphi = \operatorname{sn}(t; m).\end{aligned}\tag{7.38}$$

Поскольку $z = \sin(x/2)/m$, окончательно получаем, что

$$\begin{aligned}x &= \pm 2 \operatorname{arcsin}[m \operatorname{sn}(t; m)], \\ \dot{x} &= \pm 2m \operatorname{cn}(t; m).\end{aligned}\tag{7.39}$$

Здесь знаки «+» и «-» соответствуют верхней и нижней половинам фазовых траекторий.

Зависимости $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ при движении вблизи дна потенциальной ямы ($E \approx -1$) и вблизи сепаратрисы ($E \approx 1$) приведены на рис. 7.6а и б, соответственно. В первом случае мы имеем слабонелинейные, близкие к гармоническим колебания. Во втором случае видно, что колебания существенно ангармонические. Таким образом, наглядно проявляются основные свойства нелинейных колебаний: неизохронность и ангармоничность.

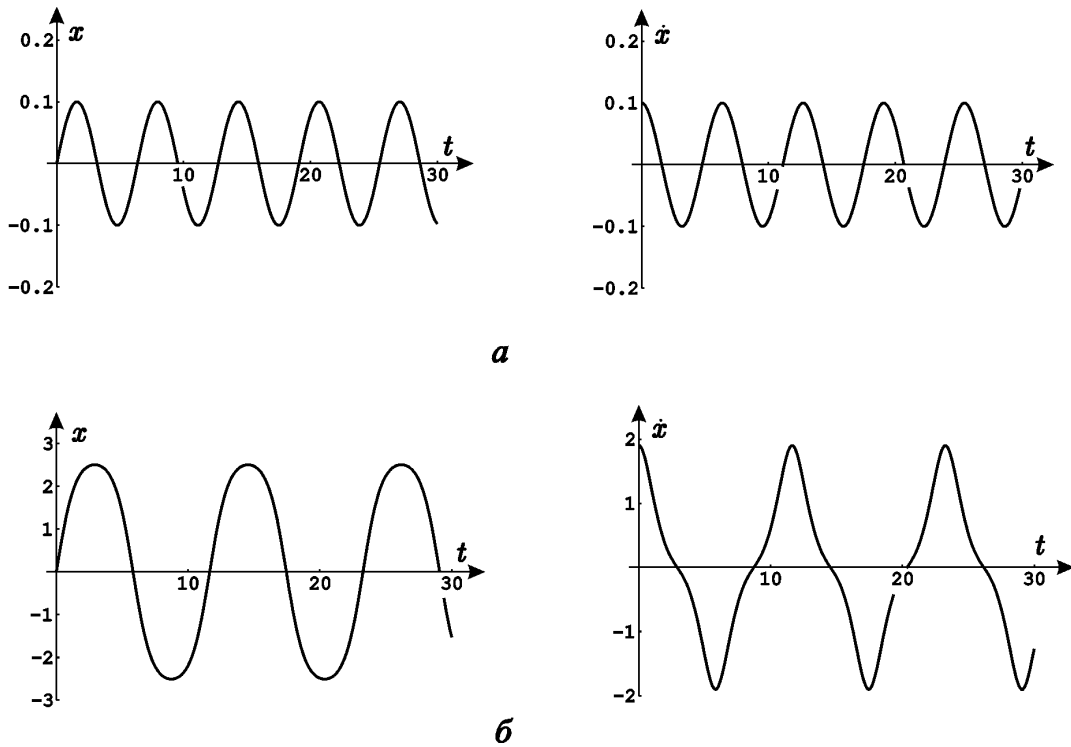


Рис. 7.6. Зависимости координаты и скорости осциллятора от времени: а — слабонелинейные колебания вблизи дна потенциальной ямы ($E = -0.9$); б — сильнонелинейные колебания в окрестности сепаратрисы ($E = 0.9$).

Движение по сепаратрисе

Движению по сепаратрисе, идущей из седла в седло, отвечает значение $E = 1$. Тогда интеграл энергии (7.20) дает

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = 1 + \cos x = 2 \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right). \quad (7.40)$$

Разделяя переменные в этом уравнении, получим

$$\frac{dx}{2 \cos^2(x/2)} = \pm dt. \quad (7.41)$$

Полученное соотношение легко можно проинтегрировать:

$$\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi + x}{4} \right) \right| = \pm (t - t_0), \quad (7.42)$$

где t_0 — постоянная интегрирования. Выражая отсюда x , окончательно получаем

$$x = 4 \operatorname{arctg} \left(\exp \left[\pm (t - t_0) \right] \right) - \pi, \quad (7.43)$$

$$\dot{x} = \pm \frac{2}{\operatorname{ch}(t - t_0)}.$$

Знаки «+» и «-» соответствуют двум различным сепаратрисам, лежащим в различных полуплоскостях. Соответствующие графики приведены на рис. 7.7.

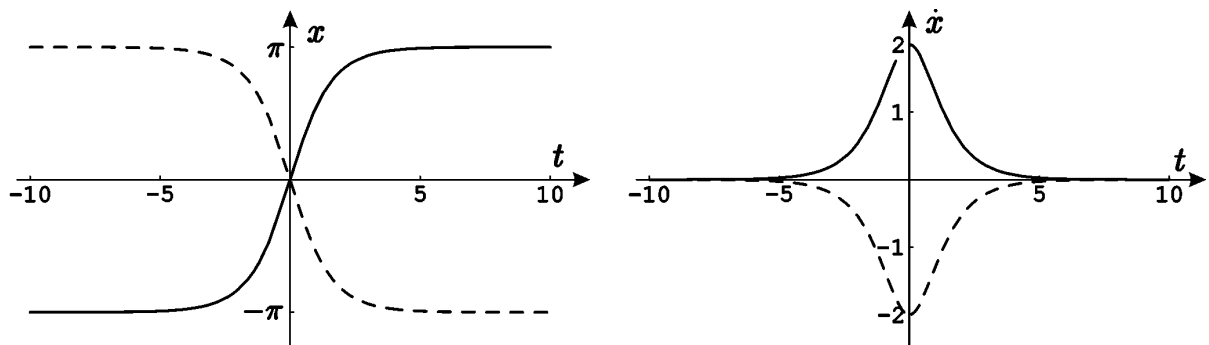


Рис. 7.7. Зависимости координаты и скорости от времени при движении осциллятора по сепаратрисе.

С другой стороны, можно воспользоваться выражениями (7.39), полученными выше, устремив в них $m \rightarrow 1$. В этом случае эллиптические функции выражаются через гиперболические согласно формулам (7.34), и мы имеем

$$x = \pm 2 \operatorname{arcsin}(\operatorname{th} t), \quad (7.44)$$

$$\dot{x} = \pm \frac{2}{\operatorname{ch} t}.$$

Нетрудно показать, что выражения (6.24) и (6.25) полностью эквивалентны, в чем мы предлагаем читателю убедиться самостоятельно.

Задача 7.2. Математический маятник длины l отклонили на угол α от верхнего положения равновесия и отпустили. Оцените период возникших колебаний. Для этого найдите закон изменения координаты от времени вблизи положения неустойчивого равновесия в линейном приближении, получите его асимптоги-

ку и “сшейте” полученное решение с законом изменения координаты от времени, который соответствует движению по сепаратрисе. Выполните оценку для маятника длиной $l = 1$ м и начальным углом $\alpha = 1^\circ$.

Решение. Уравнение математического маятника вблизи верхнего положения неустойчивого равновесия имеет вид

$$\ddot{\alpha} - \frac{g}{l}\alpha = 0.$$

Решая его с начальными условиями $\alpha = \alpha_0$ и $\dot{\alpha} = 0$, получим

$$\alpha = \alpha_0 \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right).$$

Достаточно быстро это решение выходит на асимптотику

$$\alpha \approx \frac{\alpha_0}{2} \exp\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right).$$

С другой стороны, для движения непосредственно по сепаратрисе имеем формулу (7.43), которой можно придать вид

$$\alpha = -\pi + 4 \operatorname{arctg}\left(C \exp\sqrt{\frac{g}{l}}t\right).$$

При $t \rightarrow \infty$ оно соответствует вертикальному положению маятника $\alpha = 0$. Пусть время t отрицательно, большое, но конечное. Тогда из предыдущего соотношения следует

$$\alpha \approx -\pi + 4C \exp\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right).$$

“Сшивая” его с полученным выше движением вблизи верхней точки, находим

$$C = \frac{\alpha_0}{8}.$$

Теперь можно легко определить время t , за которое маятник достигает наивысшей точки. Полагая $\alpha = \pi$, получаем

$$\pi = -\pi + 4 \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha_0}{8} \exp\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)\right),$$

откуда

$$t = \ln \frac{8}{\alpha_0}.$$

Период движения будет в четыре раза больше

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \ln \frac{8}{\alpha_0}.$$

Для $\alpha_0 = 1^\circ$ и $l = 1$ находим (не забудьте перевести градусы в радианы), что период колебаний T примерно составляет 8 сек.

Задача 7.3. Математический маятник длины $l = 1$ м находится в верхнем положении равновесия. Маятнику сообщили начальную скорость $v_0 = 10^{-3}$ м/с. Оцените период колебаний. (*Указание.* Действуйте по аналогии с предыдущей задачей.)

Задача 7.4. Массивное колесо радиуса $R = 30$ см массы $M = 1$ кг может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр колеса. На ободе колеса укреплен груз массы $m = 100$ г. Колесо находится в покое. Какую линейную скорость необходимо сообщить колесу, чтобы возникло движение, соответствующее сепаратрисе? Масса колеса сосредоточена в его ободе, трение отсутствует.

Ротационное движение

При ротационном движении зависимость $x(t)$, конечно, не является периодической. Однако скорость осциллятора остается периодической функцией времени и для нее можно получить точное решение в эллиптических функциях. Поскольку в этом случае $E > 1$, величина m , определенная согласно формуле (7.37), также больше единицы. Формула (7.26) дает

$$dt = \frac{dx}{2m\sqrt{1-m^{-2}\sin^2(x/2)}}. \quad (7.45)$$

Обозначая $\varphi = x/2$, после несложных вычислений находим решение

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{m} F\left(\varphi; \frac{1}{m}\right), \\ \varphi &= \operatorname{am}\left(mt; \frac{1}{m}\right), \\ \dot{x} &= 2m\sqrt{1-m^{-2}\sin^2\varphi} = 2m \operatorname{dn}\left(mt; \frac{1}{m}\right). \end{aligned} \quad (7.46)$$

Для периода колебаний будем иметь

$$T = \frac{4K(1/m)}{m}. \quad (7.47)$$

Период монотонно убывает с ростом энергии от бесконечности при $m = 1$ до нуля при $m \rightarrow \infty$.

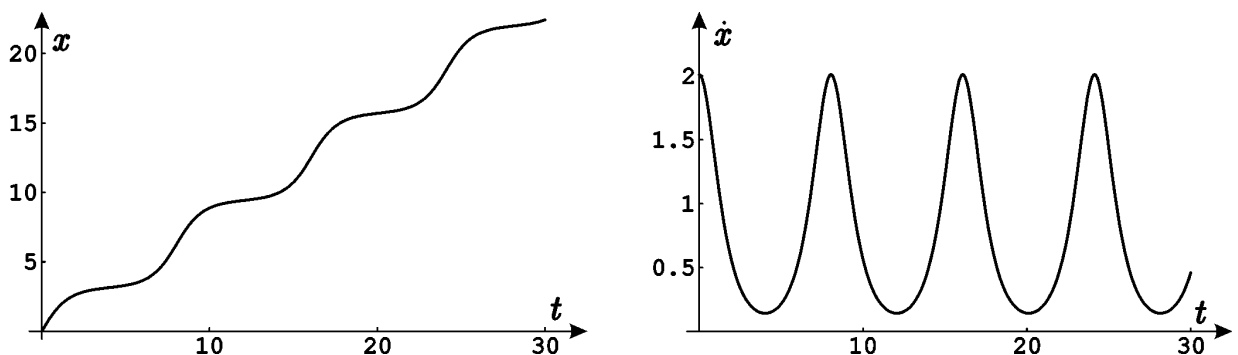


Рис. 7.8. Зависимости координаты и скорости маятника от времени при ротационном движении ($E = 1.01$)

Типичные зависимости $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ при ротационном движении приведены на рис. 7.8. Для определенности построено одно из возможных решений, для которого $\dot{x} > 0$.

Спектр колебаний маятника

Выражение для спектра колебаний маятника можно получить, используя известные формулы разложения эллиптических функций Якоби в ряды Фурье. Введем следующие обозначения:

$$m' = \sqrt{1-m^2}, \quad K' = K(m'), \quad q = \exp\left(-\frac{\pi K'}{K}\right). \quad (7.48)$$

Величина m' носит название *дополнительного модуля эллиптического интеграла*. Тогда разложения функций dn и cn имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{dn}(t) &= \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{q^n}{1+q^{2n}} \cos \frac{\pi n t}{K} \right), \\ \operatorname{cn}(t) &= \frac{2\pi}{mK} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{q^{n-1/2}}{1+q^{2n-1}} \cos \left[(2n-1) \frac{\pi t}{2K} \right] \right). \end{aligned} \quad (7.49)$$

Зависимость от m в этих формулах для краткости опущена.

Введем величину

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \begin{cases} \pi/2K(m), & m < 1 \\ \pi m/2K(1/m), & m > 1 \end{cases} \quad (7.50)$$

имеющую смысл основной частоты в спектре колебаний. Тогда, разлагая в ряды Фурье выражения (7.39) и (7.46) для \dot{x} с учетом (7.49), будем иметь

$$\dot{x} = 2m \operatorname{cn}(t; m) = 8\omega \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{q^{n-1/2}}{1+q^{2n-1}} \cos[(2n-1)\omega t] \right) \quad (7.51)$$

для колебательного движения и

$$\dot{x} = 2m \operatorname{dn}\left(mt; \frac{1}{m}\right) = 8\omega \left(\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{q^n}{1+q^{2n}} \cos 2n\omega t \right] \right) \quad (7.52)$$

для ротационного.

Выражение (7.51) содержит только нечетные гармоники, что объясняется симметрией колебаний маятника относительно замены $x \rightarrow -x$. Выражение (7.52) содержит

только четные гармоники. Правильнее сказать, что основная частота в спектре в этом случае равна 2ω (ср. рис. 7.6б и рис. 7.8).

Исследуем структуру выражения (7.51) подробнее. Введем величину $N = 1/\omega$. При слабонелинейных колебаниях вблизи дна потенциальной ямы имеем

$$m \rightarrow 0, K \rightarrow \frac{\pi}{2}, \omega \rightarrow 1, N \rightarrow 1. \quad (7.53)$$

Для определения K' используем приближенное выражение для полного эллиптического интеграла, когда его модуль стремится к единице

$$K(m) \approx \ln \frac{4}{\sqrt{1-m^2}} \text{ при } m \rightarrow 1. \quad (7.54)$$

Тогда при $m \rightarrow 0$ можно записать, что $K' \approx \ln(4/m)$ и, следовательно,

$$q \approx \exp[-2 \ln(4/m)] = \frac{m^2}{16}. \quad (7.55)$$

Таким образом, амплитуда гармоники с номером n равна

$$A_n = \frac{8\omega q^{n-1/2}}{1+q^{2n-1}} \approx 8 \left(\frac{m}{4}\right)^{2n-1}. \quad (7.56)$$

Так как $m \ll 1$, амплитуды спектральных составляющих быстро убывают с ростом n , следовательно, колебания являются квазигармоническими.

Теперь рассмотрим движение вблизи сепаратрисы. В этом случае $m \rightarrow 1$ и для $K(m)$ следует использовать соотношение (7.54). Учитывая, что $E = 2m^2 - 1$, его можно записать в виде

$$K \approx \ln \left(\frac{4}{\sqrt{(1-E)/2}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{32}{1-E} \right). \quad (7.57)$$

Тогда для величины N имеем

$$N \approx \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{32}{1-E} \right), \quad (7.58)$$

и, следовательно,

$$q \approx \exp \left(-\frac{\pi}{N} \right). \quad (7.59)$$

Выражение для амплитуды Фурье-гармоники можно переписать в виде

$$A_n \approx \frac{8\omega(\exp[-\pi/N])^{n-1/2}}{1 + (\exp[-\pi/N])^{2n-1}} = \frac{4}{\operatorname{ch}\left[\frac{\pi(n-1/2)}{N}\right]}. \quad (7.60)$$

При $n \ll N$ амплитуды гармоник примерно одинаковы: $A_n \approx 4\omega$. При $n > N$ амплитуды гармоник экспоненциально убывают с ростом n . Таким образом, величину N можно интерпретировать как эффективное число гармоник в спектре. Отметим, что частота гармоники с номером N всегда равна единице. Что касается основной частоты ω , то она, очевидно, стремится к нулю при $m \rightarrow 1$. Действительно, на сепаратрисе движение не является периодическим, поэтому спектр должен быть сплошным.

Задача 7.5. Математический маятник колеблется с угловой амплитудой 30° . Оцените амплитуды спектральных составляющих на основной частоте ω и частоте 3ω и их относительную величину.

Задача 7.6. Математический маятник колеблется с угловой амплитудой 170° . Оцените число гармоник в его спектре.

Задача 7.7. Получите формулу (7.60) следующим приближенным методом. Считайте, что закон изменения скорости от времени дается рядом последовательных импульсов (7.44), отвечающих движению по сепаратрисе, и отстоящих друг от друга на период колебания T . Разложите далее получившийся закон изменения скорости от времени в ряд Фурье.

Задача 7.8. Получите спектр ротационных движений вблизи сепаратрисы, используя метод, изложенный в предыдущей задаче.

Решение. Движение по сепаратрисе описывается формулами

$$x = -\pi + 4 \operatorname{arctg}(e^t),$$

$$v = \frac{2}{\operatorname{ch}(t)}.$$

Рассмотрим ротационное движение вблизи сепаратрисы. Будем считать, что зависимость скорости от времени имеет вид аналогичных импульсов, отстоящих на период колебаний T :

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\operatorname{ch}(t - nT)}.$$

Представим скорость в виде ряда Фурье

$$v(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} v_m e^{-im\Omega t},$$

где $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ и $v_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t) e^{im\Omega t} dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{e^{im\Omega t}}{\operatorname{ch}(t)} dt$. Вычислим коэффициенты v_m . Учтем, что подынте-

гральное выражение содержит быстро убывающую функцию, а период T большая величина, т.к. рассмат-

Лекция 7

ривается движение, близкое к сепаратрисе. Тогда можно приближенно заменить пределы интегрирования на бесконечные:

$$v_m \approx \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{im\Omega t}}{\operatorname{ch}(t)} dt.$$

Интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\operatorname{ch}(t)} dt = \frac{\pi}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)}$$

можно вычислить методом вычетов, смещая путь интегрирования в верхнюю полуплоскость. Окончательно получаем

$$v_m = \frac{\Omega}{\operatorname{ch}\left(\frac{m\pi\Omega}{2}\right)}.$$

Задача 7.9. Проведите следующее компьютерное исследование уравнения математического маятника $\ddot{x} + \sin x = 0$.

- Создайте анимационную программу, демонстрирующую движение маятника.
- Постройте зависимость от времени координаты и скорости. Пронаблюдайте колебания с малой амплитудой и движение вблизи сепаратрисы.
- Постройте график зависимости периода колебаний от амплитуды. Для этого используйте точное выражение через эллиптический интеграл, либо метод Эно, в рамках которого исходное уравнение численно решается до начала повторений. Постройте соответствующий график и сравните его с выражением в приближении слабой нелинейности.
- Постройте Фурье-спектр скорости колебаний и наблюдайте его эволюцию с ростом амплитуды: от малых колебаний до движения вблизи сепаратрисы. В этих двух предельных случаях сравните численный результат с соответствующим аналитическим решением.
- Постройте фазовые портреты консервативного и диссипативного осцилляторов. Пронаблюдайте их эволюцию с ростом параметра диссипации.