Лекция 6

Нелинейный осциллятор: конкретные примеры

В этой лекции мы обратимся к обсуждению некоторых конкретных физических систем, которые представляют самостоятельный интерес, и образом которых служит нелинейный осциллятор. Разумеется, это всего лишь ограниченный набор примеров, их количество можно умножить.

Маятник

Рассмотрим классический математический маятник. Пусть груз массы m, прикреплен к концу невесомого стержня длины l, а противоположный конец стержня располагается на оси, вокруг которой стержень может свободно вращаться в вертикальной плоскости (рис. 6.1а). Система находится в поле тяжести, ускорение свободного падения g. Если отклонить маятник от вертикали на угол φ, то момент, создаваемый силой тяжести («сила, помноженная на плечо»), будет равен $mgl\sin\varphi$. Момент инерции груза массы m, расположенного на расстоянии l от оси, равен ml^2. Следовательно, основное уравнение динамики, представляющее собой обобщение второго закона Ньютона на вращательное движение, имеет вид $ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi$ или, после сокращения на ml^2,

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi. \qquad (6.1)$$

Итак, мы приходим к уравнению нелинейного осциллятора со специальным видом нелинейной функции – синусом. Если изменить масштаб времени посредством замены $t_{\text{новое}} = t\sqrt{g/l}$, то уравнение приводится к удобному для математического исследования виду

$$\ddot{x} + \sin x = 0, \qquad (6.2)$$

где мы изменили обозначение динамической переменной на букву x, чтобы подчеркнуть соответствие с уравнением нелинейного осциллятора (5.1).

Некоторые из сделанных выше предположений на самом деле несущественны с точки зрения окончательного вида уравнения осциллятора. Пусть мы имеем тело произвольной формы с массой m, которое помещено в поле тяжести и может вращаться вокруг горизонтальной оси, не проходящей через центр масс (рис.6.1б). Пусть J —

момент инерции тела относительно оси, а l — расстояние от оси до центра масс. Тогда для угла поворота тела вокруг оси φ справедливо уравнение

$$\ddot{\varphi} = -mglJ^{-1}\sin\varphi\,, \tag{6.3}$$

т.е. мы вновь имеем осциллятор с нелинейностью синуса. Такую систему называют *физическим маятником*.

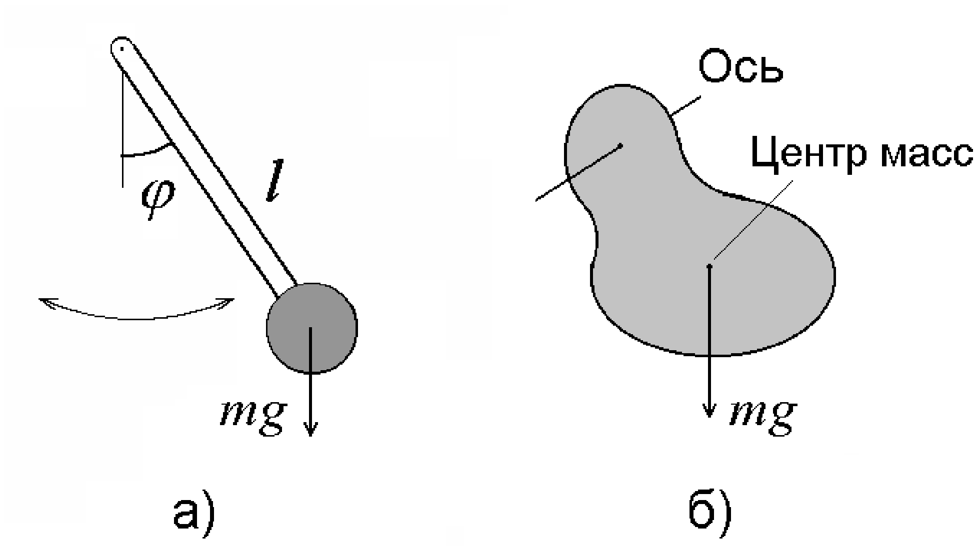

Рис.6.1. Математический (а) и физический (б) маятник.

Замечательно, что данное уравнение описывает не только колебания маятника, но оказывается применимым для целого ряда других задач. Их обсуждению и изложению аналитического подхода к исследованию этого уравнения будет посвящена отдельная лекция.

Задача 6.1. Квадратная рамка, по которой течет ток I, может вращаться без трения вокруг оси OO' (рис. 6.2). Рамка помещена в однородное магнитное поле с индукцией B, перпендикулярное оси рамки. Покажите, что колебания рамки описываются уравнением математического маятника. Масса рамки m.

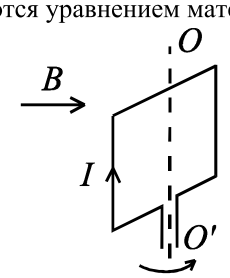

Рис. 6.2

Предположим, что маятник помещен в среду, со стороны которой на него действует сила вязкого трения, пропорциональная мгновенной скорости и тормозящая движение груза, $f_{\text{тр}} = -kv = -kl\dot{\varphi}$. Добавляя момент силы трения $lf_{\text{тр}} = -kl^2\dot{\varphi}$ в уравнение движения (6.1), получаем $ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi - kl^2\dot{\varphi}$, или

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi - \frac{k}{m}\dot{\varphi}. \tag{6.4}$$

Выполняя, как и раньше, перенормировку времени и вводя обозначение x для динамической переменной, получаем уравнение в форме

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \sin x = 0, \tag{6.5}$$

где $\gamma = \dfrac{k}{m}\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ – безразмерный параметр диссипации.

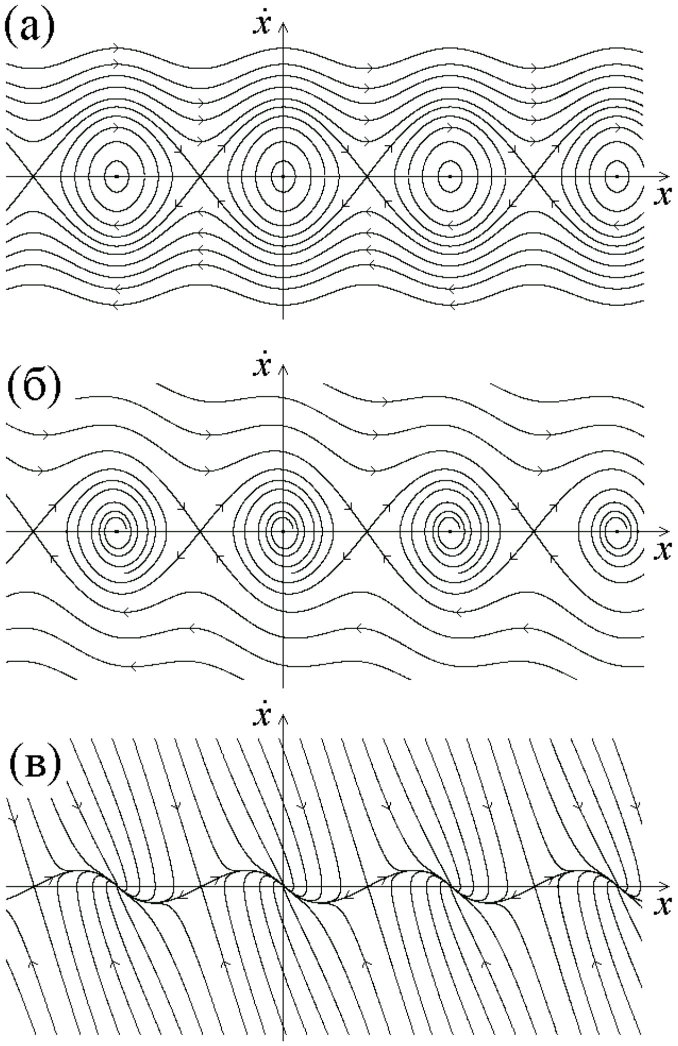

Рис.6.3. Фазовый портрет осциллятора с нелинейностью синуса (6.2): (а) в отсутствие диссипации (γ=0), (б) при небольшой диссипации (γ=0.113), (в) при большой диссипации (γ=2.1).

На рис. 6.3 показаны три фазовых портрета осциллятора с нелинейностью синуса — в отсутствие диссипации, когда устойчивые особые точки представляют собой центры, при небольшой диссипации, когда они оказываются фокусами, и при большой, когда они становятся узлами. Неустойчивые особые точки во всех случаях являются седлами. Обратите внимание на периодичность фазовых портретов по горизонтальной оси, что связано, очевидно, с периодичностью присутствующей в уравнении функции синуса.

Частица в лунке

В предыдущих лекциях мы несколько раз ссылались на простейший пример колебательной системы типа шарик в лунке. Если вести речь идет не просто о качественных иллюстрациях, а о количественной формулировке механической задачи, то в ее постановке требуется определенная аккуратность.

Во-первых, если бы мы говорили о шарике, *катающемся* в лунке, то его кинетическая энергия должна была бы складываться из энергии поступательного и вращательного движений (нужно принимать во внимание момент инерции). Во-вторых, при движении по искривленной поверхности, вообще говоря, могло бы случиться так, что шарик оторвался от нее, и на некоторое время оказался в состоянии свободного падения. Чтобы избежать обоих упомянутых осложнений, будем рассматривать движение *бусинки, надетой на проволоку*, изогнутую в соответствии с заданной формой профиля $y = f(x)$ (рис.6.4). Считаем, что на бусинку действует сила тяжести mg. Трение бусинки о проволоку и о воздух предполагается отсутствующим, так что колебательная система будет консервативной.

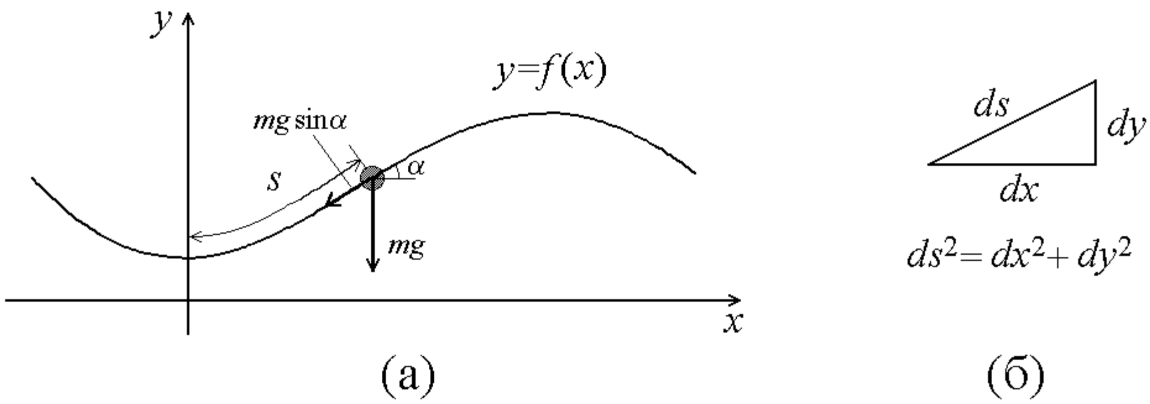

Рис.6.4. К выводу уравнения скольжения бусинки по проволоке в форме заданной кривой в поле тяжести (а). Пояснение связи между приращениями величин s, x и y при малом смещении вдоль кривой (б).

В проекции на направление движения сила равна $F = -mg\sin\alpha$, где α — угол наклона кривой в точке расположения бусинки (см. рис. 6.4а). Известно, что тангенс этого угла определяется величиной производной, $\mathrm{tg}\alpha = f'(x)$. Выражая синус через тангенс, получаем

$$F = -mgf'(x)\Big/\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\ . \tag{6.6}$$

Сила, действующая на бусинку со стороны проволоки может иметь только составляющую перпендикулярную направлению проволоки. В проекции на направление движения ускорение и сила связаны по второму закону Ньютона уравнением

$$m\ddot{s} = F\ , \tag{6.7}$$

где s обозначает расстояние, отсчитываемое вдоль проволоки. При бесконечно малом перемещении вдоль проволоки приращения ds, dx и dy связаны соотношением $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Отсюда следует, что

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\ . \tag{6.8}$$

Вычисляем последовательно первую и вторую производные по времени:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dx}\frac{dx}{dt} = \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,\frac{dx}{dt}\,, \tag{6.9}$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{f'(x)f''(x)}{\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \tag{6.10}$$

Подставляя последнее соотношение и выражение для силы F в уравнение (6.7), имеем

$$\ddot{x} + \frac{f'(x)f''(x)}{1+\left(f'(x)\right)^2}\dot{x}^2 = -g\frac{f'(x)}{1+\left(f'(x)\right)^2}\ . \tag{6.11}$$

Уравнение (6.11) выглядит довольно непривычно, и отличается от «стандартного» уравнения нелинейного осциллятора (5.1). Тем не менее, его все же можно свести к обычной форме, но для этого в качестве динамической переменной нужно использовать не проекцию частицы на горизонтальную ось x, а другую величину — расстояние, отсчитываемое вдоль кривой

$$s = \int_0^x \sqrt{1+\left(f'(X)\right)^2}\,dX\ . \tag{6.12}$$

Вычислим производную dy/ds с использованием (6.8), и (6.9):

$$\frac{dy}{ds} = \left(\frac{ds}{dy}\right)^{-1} = 1\Big/\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^{-2}} = f'(x)\Big/\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\ . \tag{6.13}$$

Сопоставляя это выражение с (6.11), видим, что $F = -mg\,dy/ds$. Производная dy/ds может рассматриваться как функция от s. Поэтому уравнение (6.13) есть не что иное, как стандартная форма уравнения нелинейного осциллятора

$$\ddot{s} = -gy'(s)\,. \tag{6.14}$$

Для этого осциллятора распределение потенциала задается функцией $y(s)$. Таким образом, форма профиля проволоки в исходных координатах (x, y) *не соответствует* форме потенциальной ямы. Чтобы получить вид потенциальной функции, надо перерисовать график, в координатах (s, y).

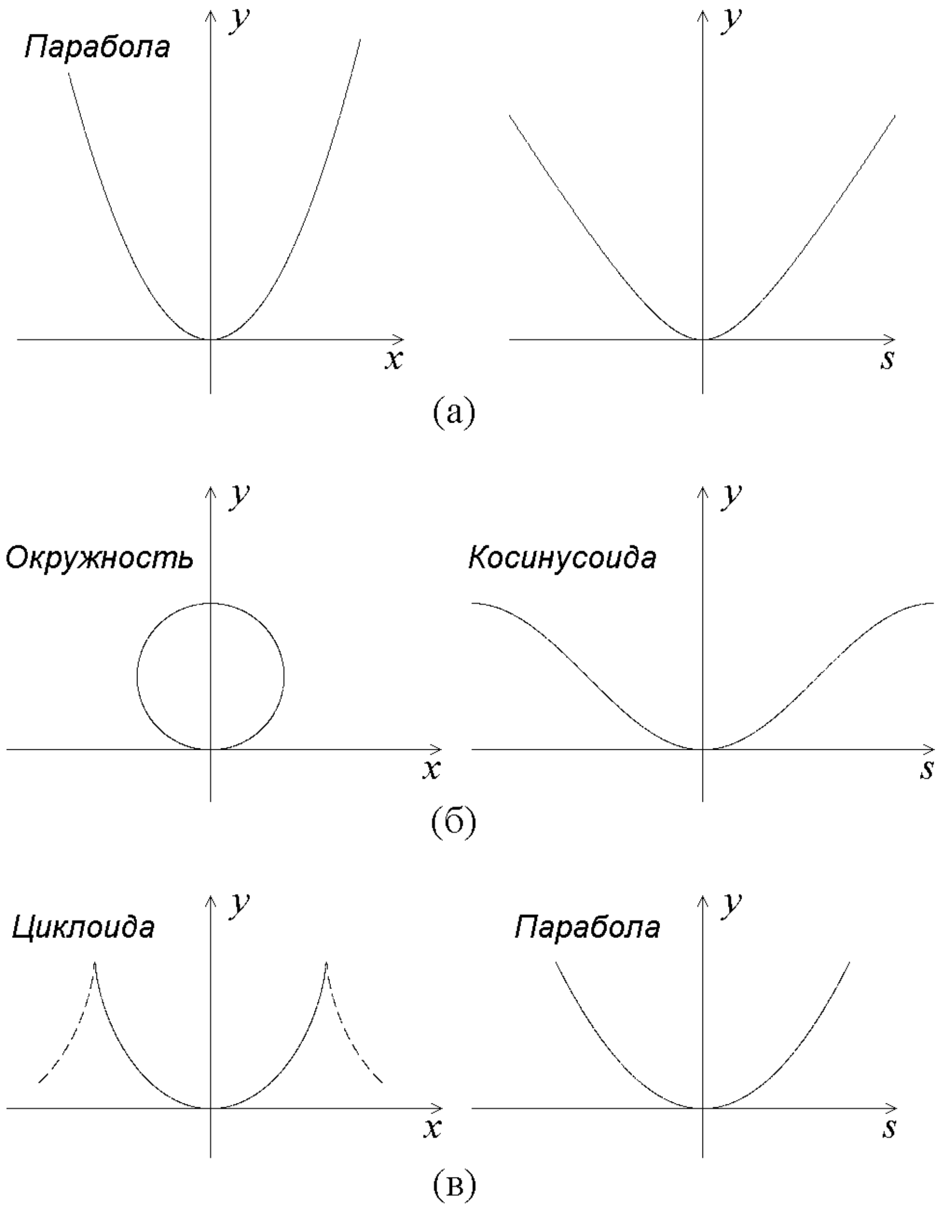

Рис.6.5. Сравнение профиля, по которому скользит частица (слева) и потенциальной ямы соответствующего нелинейного осциллятора (справа) для трех случаев: профиль в форме параболы (а), окружности (б), циклоиды (в).

На рис.6.5 представлены примеры, причем слева приведены профили, по которым скользит бусинка, а справа — соответствующие им потенциальные ямы.

Первый пример — параболический профиль

$$y = f(x) = x^2/2l\,. \tag{6.15}$$

(Здесь обе координаты x и y считаются величинами с размерностью длины, и для согласования размерностей левой и правых частей введена константа с размерностью длины l.) Подставляя (6.15) в (6.11), получаем уравнение, описывающее колебания бусинки, скользящей по параболе:

$$\ddot{x} + \frac{x\dot{x}^2}{l^2 + x^2} = -\frac{glx}{l^2 + x^2}\,. \tag{6.16}$$

Попытаемся представить его в стандартной форме (6.14). Используя (6.15) и вычисляя интеграл, имеем:

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + X^2/l^2}\,dX = \tfrac{1}{2}x\sqrt{1 + x^2/l^2} + \tfrac{1}{2}l\ln\left(x/l + \sqrt{1 + x^2/l^2}\right). \tag{6.17}$$

Обратить последнее выражение и получить x как явную функцию s не удается, поэтому приходится довольствоваться тем, что мы нашли форму потенциальной ямы $y(s)$ в параметрической форме:

$$s = \tfrac{1}{2}x\sqrt{1 + x^2/l^2} + \tfrac{1}{2}l\ln\left(x/l + \sqrt{1 + x^2/l^2}\right),\ y = x^2/2l\,. \tag{6.18}$$

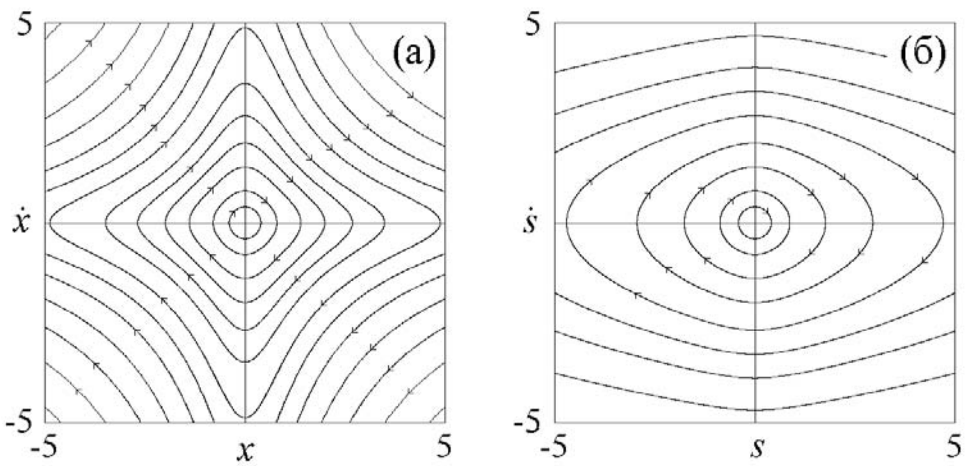

Рис. 6.6. Фазовый портрет колебаний частицы в параболическом профиле в координатах $(x, \dot{x})$ (а) и в координатах $(s, \dot{s})$, построенный для уравнения (6.16) при $l = 1$, $g = 1$.

На рис. 6.6 приведены две версии фазового портрета колебаний частицы в параболическом профиле. Один — в координатах $(x,\dot{x})$, а второй — в координатах $(s,\dot{s})$, что соответствует стандартной форме уравнений нелинейного осциллятора, с потенциальной функцией, заданной в параметрической форме уравнениями (6.18).

Второй пример — профиль в форме окружности (рис. 6.5б). Пусть радиус окружности l, тогда длина дуги, отсчитываемой вдоль кривой, выражается формулой $s = l\varphi$, где φ — угол в радианах. Считая, что нижняя точка окружности расположена в начале координат, ее параметрическое уравнение записываем в виде

$$\begin{aligned} x &= l\sin\varphi, \\ y &= l(1-\cos\varphi). \end{aligned} \tag{6.19}$$

Ясно, что уравнение (6.14) принимает знакомый вид уравнения математического маятника:

$$\ddot{s} = -g\sin(s/l) \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi\,. \tag{6.20}$$

Фазовый портрет см. на рис. 6.3а.

Перейдем к третьему примеру. Зададимся вопросом, как следует выбрать форму профиля, чтобы движение частицы соответствовало бы колебаниям линейного осциллятора? Эта задача была решена в XVII веке Христианом Гюйгенсом, который искал способ реализовать изохронный маятник для часов. Чтобы уравнение (6.14) превратилось в уравнение линейного осциллятора, производная $y'(s)$ должна выражаться линейной функцией: $y'(s) = s/l$. Поскольку должно выполняться равенство $(x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1$, имеем

$$\frac{dx}{ds} = \sqrt{1-\left(\frac{s}{l}\right)^2}\,. \tag{6.21}$$

Ясно, что удобная параметризация получится, если положить $s = l\sin\xi$. Тогда находим

$$\frac{dx}{d\xi} = l\cos^2\xi = \tfrac{1}{2}l(\cos 2\xi + 1) \quad \text{и} \quad \frac{dy}{d\xi} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{d\xi} = l\sin\xi\cos\xi = \tfrac{1}{2}l\sin 2\xi\,. \tag{6.22}$$

Интегрируя с нулевыми начальными условиями при $\xi = 0$, получаем

$$x = \tfrac{1}{2} l \left(\xi + \tfrac{1}{2} \sin 2\xi \right),$$
$$y = \tfrac{1}{2} l \left(\cos 2\xi - 1 \right). \tag{6.23}$$

Это параметрическая форма кривой, которая называется *циклоидой*. Будучи перевернутой, она в точности совпадает с кривой, которую описывает в неподвижной системе отсчета точка на ободе катящегося колеса.

Задача 6.2. Для параболически изогнутой проволочки определите период малых колебаний из формулы 6.18, используя предельный переход к случаю малых x.

Задача 6.3. Решите аналогичную задачу в случае циклоиды.

Задача 6.4. Проволочка изогнута так, что ее профиль задан функцией — цепной линией $y = a\mathrm{ch}x$. Ось x направлена горизонтально. По проволочке без трения скользит маленькая бусинка. Трение отсутствует. Получите "эффективный" потенциал $U(x)$, описывающий колебания бусинки. Возрастает или убывает период нелинейных колебаний с ростом амплитуды?

Колебательный контур с нелинейной емкостью

Рассмотрим колебательный контур, содержащий катушку индуктивности, резистор и нелинейную емкость (рис. 6.7). Нелинейная емкость, может быть представлена конденсатором с сегнетоэлектриком или полупроводниковым устройством с двумя включенными навстречу друг другу *p-n* переходами (см. лекцию 2). Предполагается, что гистерезис отсутствует, и связь между запасенным зарядом q и напряжением на подводящих проводниках U задана функцией $q = q(U)$. Однако, сейчас нам будет удобнее использовать в качестве нелинейной характеристики обратную зависимость, $U = U(q)$.

Запишем уравнения Кирхгофа для нашей схемы. Мгновенный ток через нелинейную емкость определяется производной по времени от запасенного заряда, $I = \frac{dq}{dt}$. Далее, суммарное напряжение на резисторе R и катушке индуктивности L должно быть равно $U(q)$, так что $L\frac{dI}{dt} + RI = -U(q)$. Отсюда видно, что за динамическую переменную удобнее всего принять заряд q. Комбинируя оба приведенных уравнения, получаем:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + RL^{-1}\frac{dq}{dt} = -L^{-1}U(q). \tag{6.24}$$

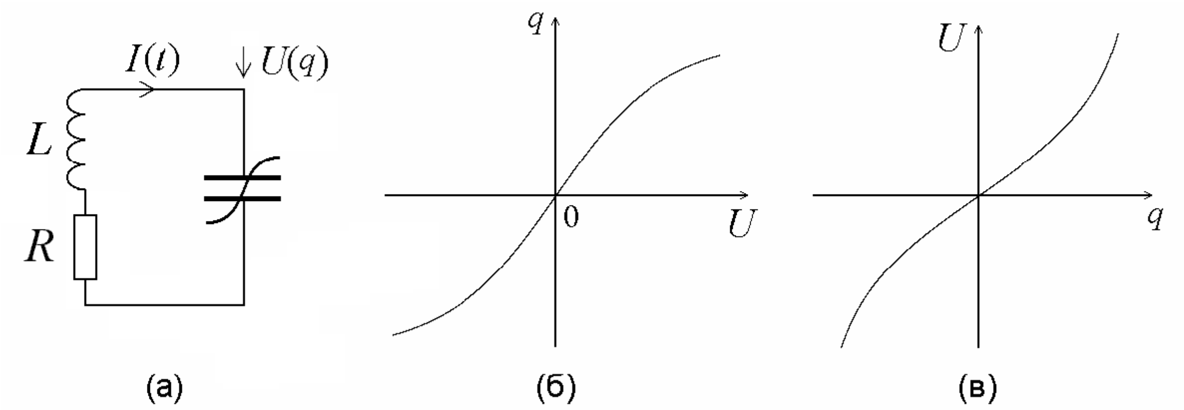

Рис. 6.7. Колебательный контур с нелинейной емкостью (а), нелинейная характеристика в виде зависимости запасенного заряда от напряжения и в виде напряжения в зависимости от запасенного заряда (в).

Обратите внимание на точную аналогию этого уравнения и уравнения механического осциллятора с диссипацией. Нелинейная характеристика конденсатора – зависимость напряжения от заряда соответствует зависимости силы от координаты в механической задаче, роль потенциальной функции выполняет функция

$$V(q) = \int_0^q U(q')\,dq', \tag{6.25}$$

а диссипативный член обязан своим появлением наличию сопротивления.

В частности, если конденсатор линейный, $U(q) = q/C$, и диссипация отсутствует, получаем уравнение гармонического осциллятора $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$ с собственной частотой $\omega_0 = 1/LC$ – хорошо известный классический результат для колебательного контура.

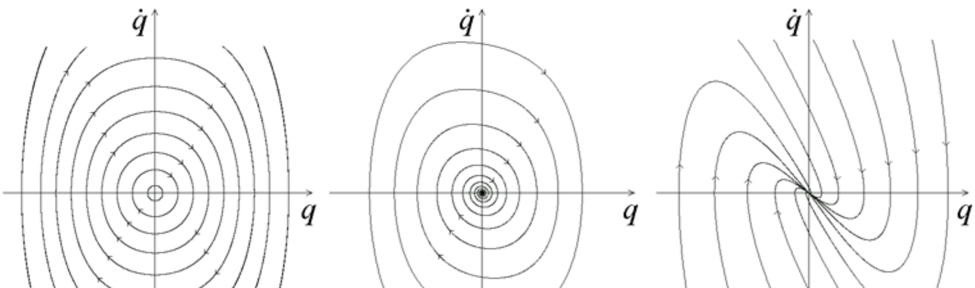

Рис.6.8. Фазовые портреты для колебательного контура с нелинейной емкостью, форма характеристики которой показана на рис. 6.6: а) в отсутствие диссипации, б) при слабой диссипации, в) при сильной диссипации.

На рис. 6.8 показан вид фазовых портретов для колебательного контура с нелинейной емкостью в предположении, что форма нелинейной характеристики соответствует показанной на рис. 6.7. Имеется единственная устойчивая неподвижная точка в начале координат. В отсутствие диссипации это центр, при слабой диссипации — устойчивый фокус, при сильной диссипации — устойчивый узел.

Колебательный контур с нелинейной индуктивностью

Рассмотрим колебательный контур, схема которого показана на рис. 6.9а. Присутствующая здесь нелинейная индуктивность может быть представлена катушкой с ферромагнитным сердечником (см. лекцию 2). Будем считать, что гистерезиса нет, т.е. связь между магнитным потоком и протекающим по виткам током задана некоторой нелинейной функцией. Нам будет удобно представить эту связь в виде $I = I(\Phi)$ (рис. 6.9б,в).

Запишем уравнения Кирхгофа. Напряжение на катушке индуктивности дается выражением $U = d\Phi/dt$. Далее, суммарный мгновенный ток через катушку индуктивности, резистор R и конденсатор C должен равняться нулю, так что $I(\Phi) + U/R + C\,dU/dt = 0$. За обобщенную координату удобно принять магнитный поток Φ. Комбинируя оба уравнения, приходим к уравнению нелинейного диссипативного осциллятора:

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{d\Phi}{dt} + R^{-1}I(\Phi) = 0\,. \tag{6.26}$$

Вид фазовых портретов качественно такой же, как для колебательного контура с нелинейной емкостью, см. рис. 6.8.

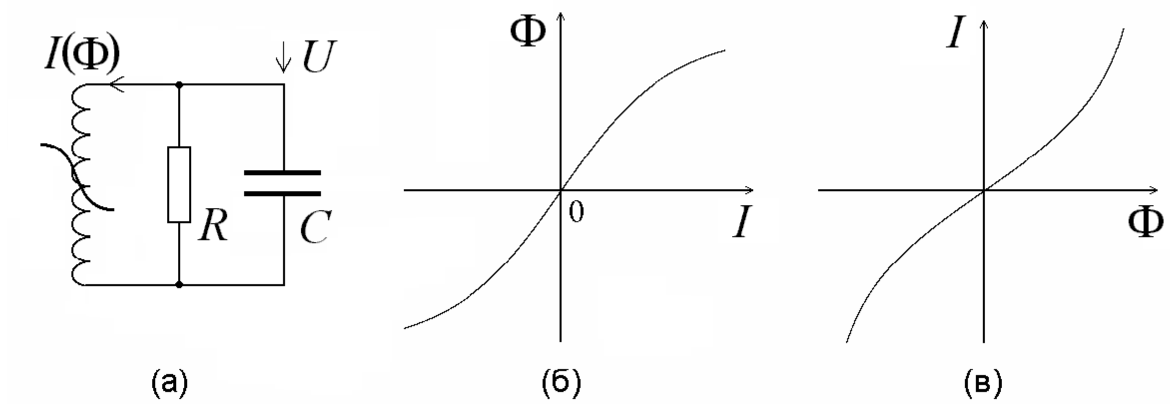

Рис.6.9. Колебательный контур с нелинейной индуктивностью (а), нелинейная характеристика в виде зависимости магнитного потока от тока в витках катушки индуктивности (б) и обратная зависимость, используемая в приведенных выкладках в качестве нелинейной характеристики (в).

Задача 6.5. Получите уравнения для колебательного контура с нелинейной емкостью при включении резистора параллельно катушке индуктивности и для контура с нелинейной индуктивностью при последовательном включении сопротивления. Удается ли в этих случаях привести уравнения к стандартной форме нелинейного осциллятора с диссипацией?