

## Нелинейный осциллятор: фазовый портрет

В этой лекции мы собираемся подробно изложить на качественном уровне рецепт построения фазового портрета нелинейного осциллятора. Будет рассмотрен сначала консервативный, а затем диссипативный случай. По ходу дела читатель получит представление о том, какую роль играют характерные ключевые объекты на фазовой плоскости (особые точки, сепаратрисы, замкнутые траектории), какие особенности колебательных процессов с ними связаны, а также приобретет первоначальный опыт визуального распознавания этих объектов.

### **Построение фазового портрета консервативного нелинейного осциллятора**

Рассмотрим уравнение консервативного осциллятора

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \quad (5.1)$$

и предположим, что функция  $f(x)$  имеет вид, показанный на рис. 5.1а; это соответствует потенциальной функции на рис. 5.1б. Процедура построения фазового портрета этого нелинейного осциллятора, которая сейчас будет объяснена, иллюстрируется рисунками 5.1в и г.

Прежде всего, заметим, что если фигурирующая в уравнении (5.1) функция  $f(x)$  обращается в нуль в некоторой точке  $x_0$ , то эта точка соответствует состоянию равновесия. Действительно, частица в ней может оставаться неограниченно долго, чему отвечает решение уравнения в виде константы:  $x(t) = x_0$ ,  $v(t) = \dot{x} = 0$ . Поскольку  $f(x) = -U'(x)$ , то состояния равновесия — это точки, где обращается в ноль производная потенциальной функции, в нашем случае локальные максимумы и минимумы. Минимумы — это устойчивые, а максимумы — неустойчивые состояния равновесия. Действительно, в первом случае смещение частицы из точки равновесия  $x_0$  приведет к появлению силы, стремящейся вернуть частицу назад, а во втором — к появлению силы, способствующей дальнейшему уходу от состояния равновесия. Если система находится в состоянии равновесия, то скорость равна нулю, поэтому на фазовом портрете на

плоскости  $(x, \dot{x})$  эти состояния отвечают точкам на оси абсцисс, расположенным в точности под точками минимума и максимума потенциальной функции с предыдущего графика. Это особые точки на фазовой плоскости осциллятора. Устойчивые точки (отвечающие локальному минимуму) обозначаем, как это обычно принято, кружочками, а неустойчивые (отвечающие локальному максимуму) — косым крестиком.

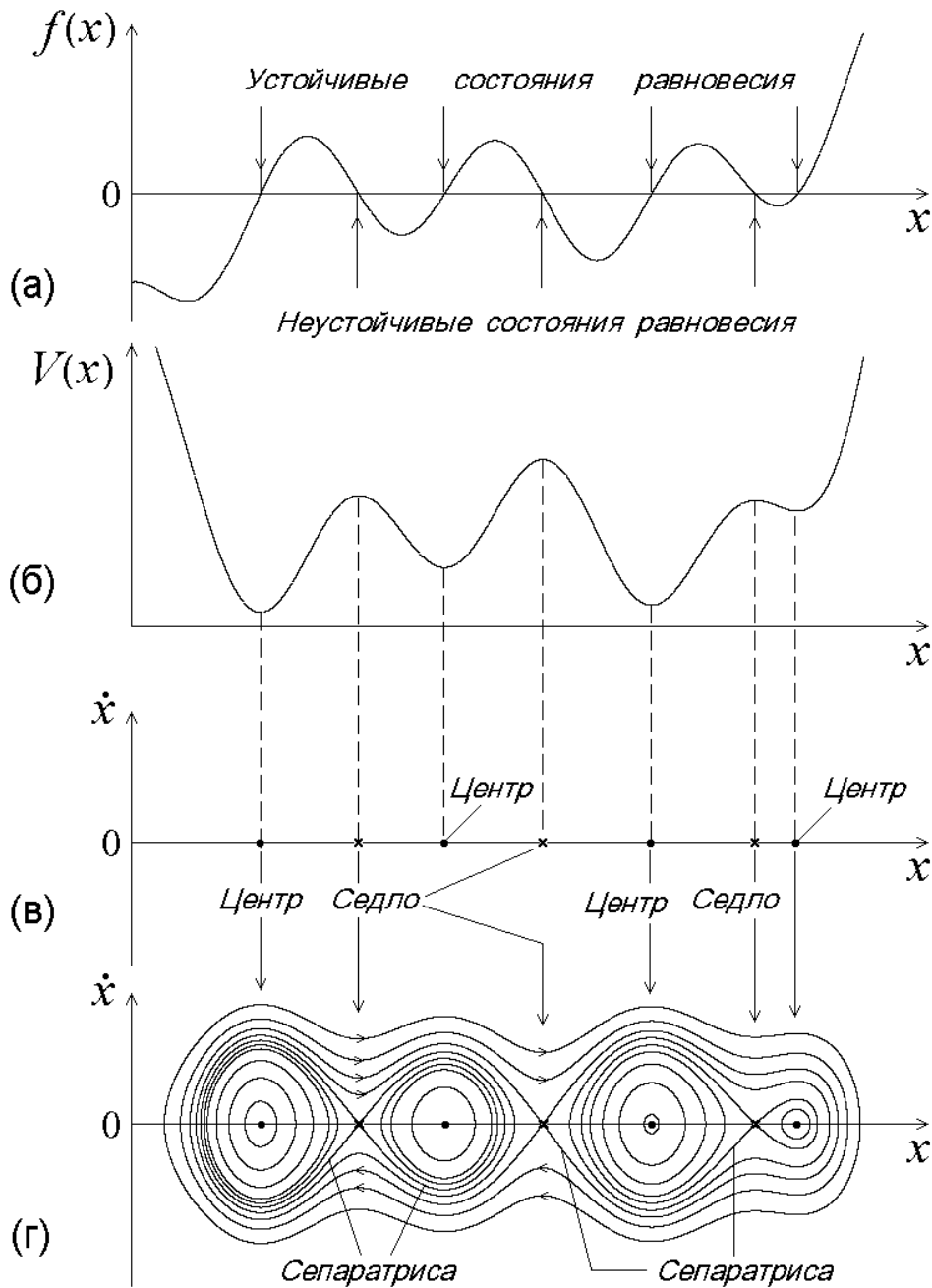


Рис. 5.1. Пример нелинейного осциллятора: (а) функция  $f(x)$ , (б) потенциальная функция, (в) особые точки на фазовой плоскости, (г) фазовый портрет.

В типичном случае локальные максимумы и минимумы гладкой функции одного переменного – это квадратичные экстремумы, локально вблизи точки экстремума график функции аппроксимируется параболой. В самом деле, чтобы иметь вместо квадратичного экстремума, например, кубическую точку перегиба, функция должна удовлетворять дополнительному условию: в точке, где равна нулю первая производная, должна обращаться в нуль также и вторая производная. Чтобы получить экстремум четвертого порядка, надо наложить два условия: в точке, где равна нулю первая производная, должны обращаться в нуль вторая и третья производные. Пусть наша функция зависит от двух управляющих параметров, тогда на плоскости этих параметров функции с квадратичными экстремумами будут заполнять целые области, функции с кубическими точками перегиба будут встречаться лишь на определенных линиях, а функции с экстремумом четвертой степени – в отдельных точках. Рассматривая случай квадратичного экстремума, мы охватываем подавляющее большинство практически интересных ситуаций, тогда как какое-либо иное поведение потенциальных функций может представлять лишь узко специальный интерес.

Чтобы выяснить вид фазовых траекторий, целесообразно использовать первый интеграл уравнения нелинейного осциллятора. Умножим уравнение (5.1) на  $\dot{x}$ , перенесем оба члена в левую часть и представим ее в виде полной производной. Выражение, стоящее под знаком первой производной, должно быть константой:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) = E. \quad (5.2)$$

При каждом значении константы это уравнение определяет на фазовой плоскости некоторую кривую.

Постоянную интегрирования  $E$  — полную энергию осциллятора — можно определить, задав в начальный момент величины  $x$  и  $\dot{x}$  (начальные условия), и вычисляя левую часть в (5.2). Тогда в процессе динамики нашей колебательной системы точка, представляющая мгновенное состояние на фазовой плоскости, обязана в любой момент времени оставаться на кривой, отвечающей данному значению константы. При других начальных условиях получим другую величину константы, и ей будет отвечать другая кривая. Таким образом, придавая константе  $E$  разные значения, мы получаем семейство кривых на фазовой плоскости, представляющих фазовые траектории.

Здесь уместно упомянуть аналогию из географии. Представим себе некоторый рельеф на местности — горы, впадины и т.д. На карте его изображают системой *линий постоянного уровня*. В окрестности вершин и впадин линии уровня выглядят как семейства замкнутых вложенных друг в друга кривых. Перевалы (седловины) представлены линиями уровня, которые локально имеют вид семейства гипербол. Если взять поверхность, заданную уравнением  $z = y^2/2 + U(x)$ , то линии уровня на карте в плоскости  $(x, y)$  как раз соответствуют фазовым траекториям нашей колебательной системы (рис. 5.2). Специфика «местности» в том, что зависимость от  $y$  дается квадратичным членом, поэтому нет холмов, а впадины и седловины рельефа располагаются только на оси  $y = 0$ .

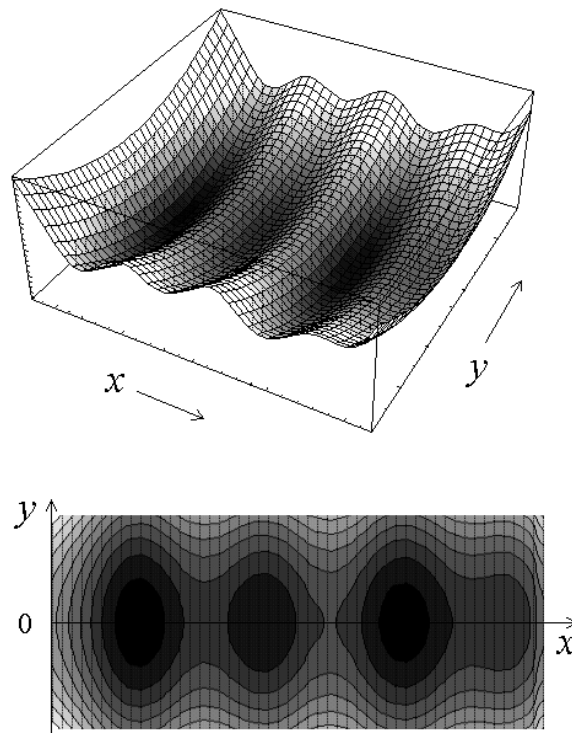


Рис. 5.2. Географическая аналогия фазовой плоскости: (а) «рельеф местности», заданный функцией  $z = y^2/2 + U(x)$ , и (б) его изображение на карте (контурный график).

Выясним характер устройства фазовых траекторий вблизи неподвижных точек, отвечающих экстремумам потенциальной функции.

Около точки локального минимума  $x_0$  представление потенциальной функции в виде ряда Тейлора имеет вид  $U(x) = c_0 + \frac{1}{2}c_2(x - x_0)^2 + \dots$ , где  $c_2 = U''(x_0) > 0$ . В области малых отклонений от точки  $x_0$  выражение (5.2) переписывается в виде

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{c_2(x - x_0)^2}{2} = E_0, \quad E_0 = E - c_0. \quad (5.3)$$

На плоскости  $(x, \dot{x})$  это уравнение определяет семейство эллипсов с центром в точке  $x_0$ , размеры которых определяются величиной константы  $E_0$ . Особая точка, в окрестности которой фазовые траектории представлены семейством вложенных друг в друга замкнутых кривых, классифицируется как точка типа *центр* (см. лекцию 4).

Вблизи точки локального максимума потенциальная функция представляется в виде  $U(x) = c_0 - \frac{1}{2}c_2(x - x_0)^2 + \dots$ , где  $c_2 = -U''(x_0) > 0$ . Для малых отклонений от состояния равновесия выражение (5.2) принимает вид

$$\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{c_2(x-x_0)^2}{2} = E_0, \quad E_0 = E - c_0, \quad (5.4)$$

и определяет на фазовой плоскости семейство гипербол. В частности, при  $E_0 = 0$  гипербола вырождается в две прямые, пересекающиеся в точке  $(x_0, 0)$ . Особая точка, в окрестности которой фазовые траектории локально выглядят как семейство гипербол, это *седло*.

Среди имеющихся вблизи седла орбит выделяются особые траектории, ведущие в точку седла или уходящие от этой точки. Они называются *сепаратрисами*.

Вблизи точки седла сепаратрисы выглядят как кривые, пересекающиеся в точке седла. Как же быть со сделанным выше утверждением, что фазовые траектории не могут пересекаться? На самом деле пересечения и нет. Во-первых, надо иметь в виду, что фазовая траектория, представленная входящей в седло сепаратрисой, отнюдь *не содержит* точку седла. Как можно показать, система, движущаяся по этой фазовой траектории, лишь *асимптотически приближается* к точке седла – неустойчивому состоянию равновесия при  $t \rightarrow \infty$ . Точно так же, выходящая из седла сепаратриса изображает движение системы по траектории асимптотически близкой к седлу при  $t \rightarrow -\infty$ , но вовсе не траекторию, начинающуюся в этой точке. Действительно, при начальном состоянии, точно соответствующим состоянию равновесия, система оставалась бы в ней всегда! Таким образом, *точка седла представляет собой одну отдельную фазовую траекторию* (как, впрочем, и любая другая точка, отвечающая состоянию равновесия).

Сепаратрисы играют важную роль, поскольку разбивают фазовую плоскость на области качественно разной по характеру динамики, отвечающие траекториям *разного топологического типа*. Рассмотрим, например, потенциальную яму, показанную на рис. 5.1б. Интуитивно ясно (представьте себе механические колебания шарика в яме такой формы), что колебания могут происходить

- (а) около одного из минимумов I, II, III, IV,
- (б) захватывать области минимумов I и II,
- (в) захватывать области минимумов III и IV,
- (г) захватывать область всех четырех минимумов.

На рис. 5.3 показаны области на фазовой плоскости, занятые траекториями каждого из этих типов. Как можно видеть, сепаратрисы на фазовой плоскости выступают в качестве разграничителей этих областей; этим и определяется их название (separate – разделять, отделять).

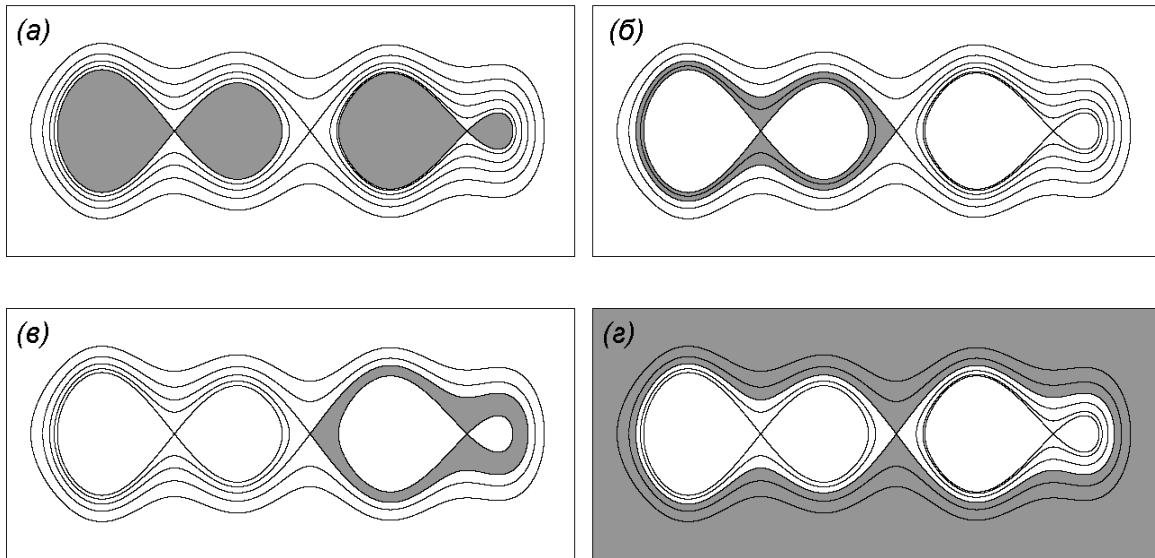


Рис. 5.3. Фазовая плоскость нелинейного осциллятора с потенциалом, соответствующим рисунку 5.1б. Области, занятые траекториями определенного топологического типа, закрашены серым. Сепаратрисы есть кривые, разграничивающие эти области.

Итогом этого раздела можно считать рецепт, как построить качественно правильный фазовый портрет нелинейного осциллятора, отправляясь от заданного графика потенциальной функции. Прежде всего, располагаем будущий фазовый портрет в точности под этим графиком и изображаем оси координат – горизонтальную  $x$  и вертикальную  $\dot{x}$ . Далее, отметим на горизонтальной оси особые точки, отвечающие устойчивым состояниям равновесия в локальных минимумах потенциальной функции (центры), и неустойчивым – в локальных максимумах (седла). Если мы проведем на графике потенциальной функции горизонтальные касательные в точках максимума, то их точки пересечения с кривой определяют границы областей расположения сепаратрис соответствующих седел. Далее, изображаем сами сепаратрисы, имеющие в точках седел вид кривых, пересекающихся крест-накрест, а также семейства замкнутых, вложенных друг в друга овальных кривых вокруг центров. Стрелочки, обозначающие направление движения по фазовым траекториям, расставляем так, чтобы в верхней полуплоскости они были обращены направо, а в нижней — налево. В самом деле,  $\dot{x} > 0$  отвечает нарастанию координаты  $x$  во времени, а  $\dot{x} < 0$  — убыванию. Читателю настоятельно рекомендуется нарисовать от руки несколько произвольных графиков потенциальных функций и построить соответствующие им фазовые портреты.

**Задача 5.1.** Шарик массы  $m$  может колебаться в невесомости на пружине, зависимость упругой силы которой от деформации имеет вид  $F = kx + cx^3$ , где  $k$  и  $c$  — положительные коэффициенты. Постройте

фазовый портрет системы. В чем его отличие от фазового портрета соответствующей линейной системы? Укажите область на фазовой плоскости, в пределах которой систему можно считать линейной.

**Задача 5.2.** Найдите уравнение фазовых траекторий для колебательного контура, составленного из конденсатора емкости  $C$  и нелинейной индуктивности, для которой зависимость магнитного потока от тока  $I$  дается соотношением  $\Phi = LI + kI^3$ . Постройте соответствующий фазовый портрет. (Указание. Найдите выражение для энергии, запасенной индуктивностью.)

**Задача 5.3.** Небольшое тело массы  $m$  может скользить без трения по горизонтальному стержню (рис. 5.4). Тело прикреплено пружиной жесткости  $k$  к точке  $O$ , находящейся на расстоянии  $l$  от стержня. Длина пружины в нерастянутом состоянии  $l_0$ , причем  $l_0 > l$ . Найдите положения равновесия и соответствующие им значения потенциальной энергии. Постройте график функции  $U(x)$ , дающий зависимость потенциальной энергии от координаты тела, и с его помощью определите, какие из положений равновесия устойчивы. Постройте фазовый портрет системы. Укажите характерные элементы фазового портрета: особые точки, типичные траектории, сепаратрисы. Напишите уравнение сепаратрисы в явной форме. Используя график потенциальной энергии, опишите поведение тела, отвечающее перечисленным элементам фазового портрета.

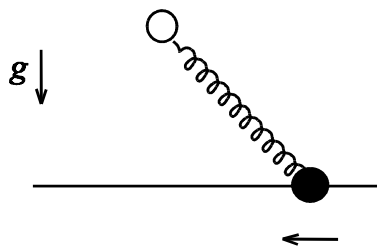


Рис.5.4

**Задача 5.4.** Молекула может совершать колебательные движения в поле, заданном потенциалом Леннарда-Джонса [J. Lenard-Jones, 1924]

$$U(r) = 4a \left[ \left( \frac{b}{r} \right)^{12} - \left( \frac{b}{r} \right)^6 \right].$$

Постройте фазовый портрет системы и проведите его исследование по схеме, описанной в предыдущей задаче. Масса молекулы равна  $m$ , параметры  $a$  и  $b$  считайте известными. Какую физическую интерпретацию можно дать для движения по сепаратрисе?

**Задача 5.5.** Шарик массы  $m$ , несущий заряд  $q$ , может без трения скользить по непроводящей спице. Спица проходит через центры двух неподвижных колец перпендикулярно их плоскости (рис. 5.5). Кольца несут заряды противоположных знаков  $-Q$  и  $Q$  и расположены на расстоянии  $2a$  друг от друга. Радиусы колец  $R$ . Постройте фазовый портрет системы.

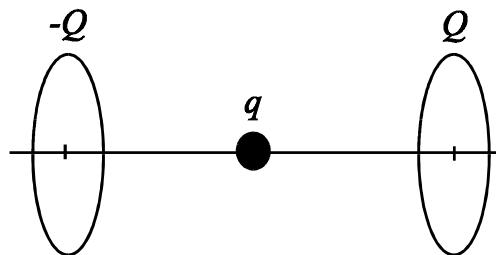


Рис.5.5

**Задача 5.6.** На рис. 5.6 показан фазовый портрет системы. Изобразите соответствующий ему график функции  $U(x)$ .

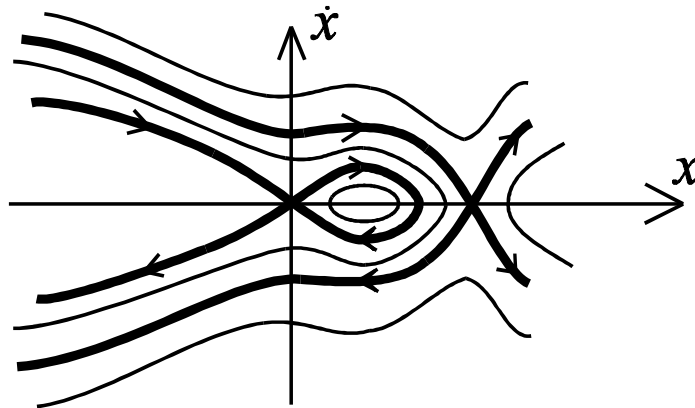


Рис. 5.6

### Нелинейный осциллятор с диссипацией

Из линейной теории колебаний известно, что добавление в уравнение гармонического осциллятора дополнительного члена с первой производной приводит к уравнению линейного диссипативного осциллятора. Эта модель описывает такие системы как механический осциллятор с вязким трением, когда сила трения пропорциональна скорости, и колебательный контур, в котором наряду с емкостью и индуктивностью присутствует резистор (сопротивление). Аналогичная модификация нелинейного осциллятора приводит к уравнению

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + f(x) = 0, \quad (5.5)$$

в котором положительная постоянная  $\gamma$  имеет смысл параметра диссипации. Обсудим вопрос о том, как трансформируется фазовый портрет нелинейного осциллятора по сравнению с консервативным случаем.

Попытаемся реализовать ту же самую последовательность рассуждений, которая в отсутствии диссипации приводила к получению первого интеграла – явного соотношения, определяющего на фазовой плоскости семейство кривых — фазовых траекторий.

Введем, как и раньше, потенциальную функцию  $U(x) = \int_0^x f(X) dX$ , перенесем член, ответственный за диссипацию, в правую часть и перепишем уравнение в виде

$$\ddot{x} + U'(x) = -\gamma \dot{x}, \quad (5.6)$$



Умножим теперь уравнение на  $\dot{x}$  и представим левую часть как полную производную:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) \right) = -\gamma \dot{x}^2. \quad (5.7)$$

Если параметр диссипации равен нулю, то выражение под знаком производной не меняется во времени, так что на фазовой плоскости изображающая точка может двигаться только вдоль кривой, заданной уравнением  $\dot{x}^2/2 + U(x) = E$ ,  $E = \text{const}$ . При наличии диссипации  $\gamma > 0$ , так что правая часть соотношения (5.7) отрицательна, если только производная  $\dot{x}$  отлична от нуля. Точно так же равной нулю производная может быть только для решения, отвечающего неподвижной точке. Для любого другого решения наличие диссипации приводит к тому, что производная от величины  $\dot{x}^2/2 + U(x)$  будет отрицательной (за исключением, может быть, отдельных моментов времени, когда она равна нулю), и эта величина, следовательно, с течением времени обязана убывать. Если параметр диссипации мал, то это уменьшение очень медленное. Чтобы представить себе, как при этом будет выглядеть движение изображающей точки на фазовой плоскости, вернемся к фазовому портрету консервативного осциллятора и рассмотрим обсуждавшийся ранее конкретный пример (см. рис. 5.1). Изображающая точка, двигаясь в первом приближении вдоль изображенных на рисунке кривых, будет как бы медленно переходить с одной кривой на другую соответственно уменьшению величины  $E = \dot{x}^2/2 + U(x)$ .

На основании этих соображений, можно очень просто качественно изобразить фазовый портрет осциллятора с малой диссипацией. Он будет выглядеть, как показано на рис. 5.7в. В частности, движение вблизи устойчивого состояния равновесия будет совершаться не по замкнутой траектории, как в консервативном случае, а по скручивающейся спирали. Это соответствует затухающим колебаниям. В конце концов, когда будет достигнута точка минимума потенциала, дальнейшее уменьшение величины  $E$  станет невозможным, и система придет в состояние устойчивого равновесия. Особые точки диссипативной колебательной системы, которые отвечают устойчивым состояниям равновесия, и к которым фазовые траектории приближаются по спирали, называются *устойчивыми фокусами*.

При очень больших значениях параметра диссипации характер движения вблизи устойчивых состояний равновесия меняется: вместо приближения траекторий к равно-

весию с осцилляциями наблюдается просто медленное затухание величины отклонения от неподвижной точки, без перемен знака. В этом случае особую точку называют *устойчивым узлом* (рис. 5.7г).

В окрестности особых точек типа седла фазовые траектории устроены качественно так же, как и в консервативном случае. В частности, у каждого седла имеется устойчивая сепаратриса — две ветви траекторий, асимптотически приближающихся к седлу, и неустойчивая сепаратриса из двух ветвей, вдоль которых изображающая точка удаляется от седла (рис. 5.7в,г).

Устойчивые неподвижные точки в диссипативном случае выступают как аттракторы. *Аттрактор* — это такое множество в фазовом пространстве диссипативной системы, к которому асимптотически приближаются все фазовые траектории из определенной области. Эту область называют *бассейном* данного аттрактора.

В общем случае аттракторы могут иметь различную природу. Например, аттрактор в виде замкнутой притягивающей фазовой траектории — предельный цикл соответствует периодическим автоколебаниям, странный аттрактор — сложно и тонко устроенное фрактальное притягивающее множество, которое может встречаться, начиная с размерности фазового пространства, равной трём, ассоциируется с динамическим хаосом.

В фазовом пространстве столь простой системы, как нелинейный диссипативный осциллятор, аттракторы представлены только состояниями равновесия, т.е. притягивающими множествами, состоящими из одной точки — устойчивого фокуса или узла. Если потенциальная функция имеет более одного минимума, то присутствует несколько сосуществующих аттракторов, каждый из которых обладает своим бассейном притяжения. Рассматривая фазовые портреты на рис. 5.7, приходим к выводу, что роль сепаратрис на фазовой плоскости нелинейного диссипативного осциллятора состоит в том, что они *разграничивают бассейны притяжения различных аттракторов* (состояний устойчивого равновесия). На рис. 5.8 показаны бассейны притяжения четырех устойчивых состояний равновесия, имеющих в нашем примере нелинейного осциллятора.

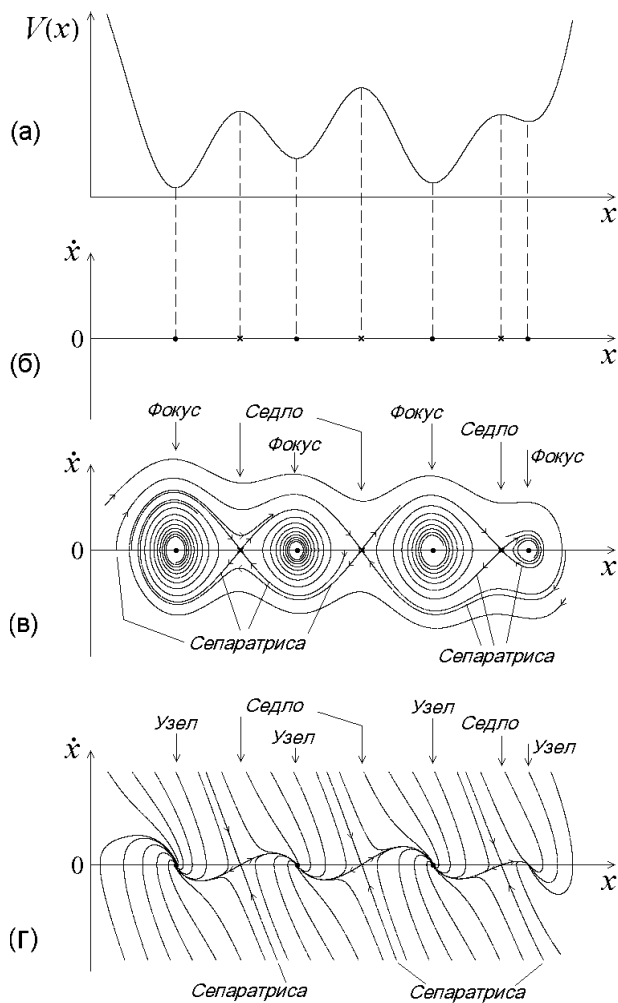


Рис.5.7. Нелинейный осциллятор с потенциальной функцией (диаграмма (а)) такого же вида как для консервативного осциллятора на рис. 5.1. Показаны особые точки на фазовой плоскости – кружочками устойчивые, крестиками неустойчивые (б), а также фазовый портрет в случае слабой и сильной диссипации, соответственно,  $\gamma = 0.2$  (в) и  $\gamma = 6$  (г).

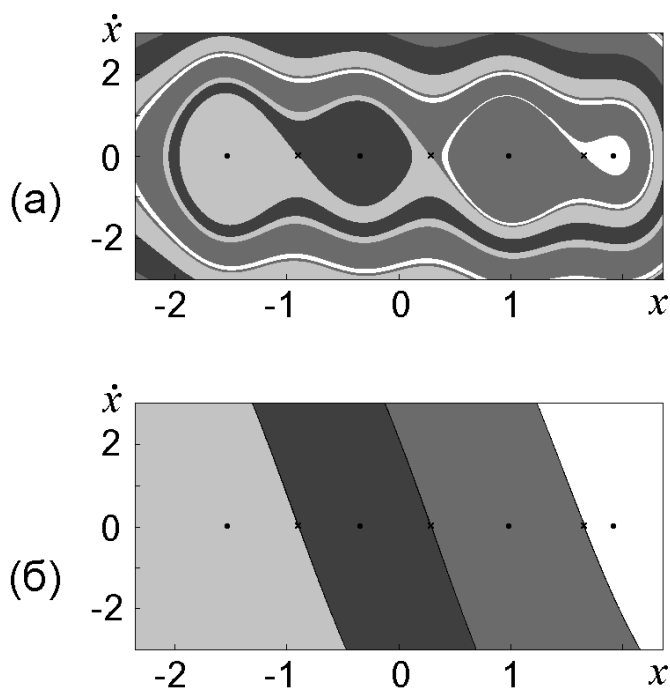


Рис. 5.8. Фазовая плоскость нелинейного осциллятора с потенциалом, соответствующим рис. 5.7. Области, закрашенные определенными тонами серого цвета, представляют собой бассейны притяжения устойчивых состояний равновесия (черные кружочки). Границами бассейнов служат сепаратрисы седел, показанных крестиками. Верхняя диаграмма (а) отвечает случаю малой диссипации ( $\gamma = 0.2$ ), а нижняя (б) – большой ( $\gamma = 6$ ).

**Задача 5.7.** При каких значениях параметра  $\gamma$  осциллятор, описываемый уравнением  $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \sin x = 0$ , будет иметь в начале координат устойчивый фокус, а при каких — устойчивый узел?

**Задача 5.8.** При каких значениях параметра  $\gamma$  осциллятор  $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + (x^3 - x + \frac{8}{27}) = 0$ , будет иметь (а) два устойчивых фокуса, (б) устойчивые фокус и узел, (в) два устойчивых узла?

**Задача 5.9.** На рис. 5.9 показаны три фазовые траектории. Одна из них относится к консервативной системе. Какая из двух остальных может относиться к этой же системе при включении небольшой диссипации? Ответ обоснуйте.

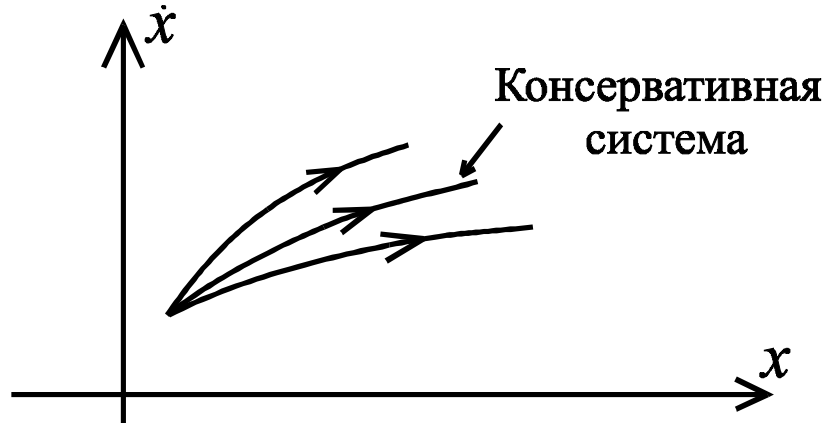


Рис. 5.9

**Задача 5.10.** На рис. 5.10 изображена петля сепаратрисы некоторой консервативной системы. Изобразите вид сепаратрисы при включении небольшой диссипации. (*Указание.* Восстановите вид функции  $U(x)$  и выясните характер движения и его модификацию при включении диссипации для каждой из ветвей сепаратрисы).

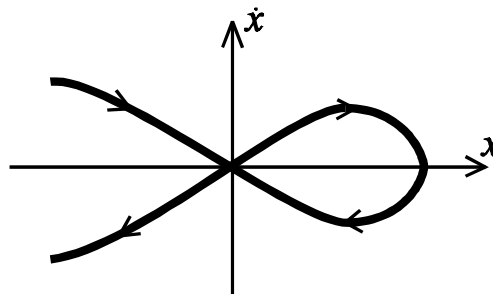


Рис.5.10

**Задача 5.11.** В системе, описанной в задаче 5.3, имеется затухание, причем сила сопротивления, действующая на шарик, пропорциональна его скорости с известным коэффициентом  $\gamma$ . Изменяются ли при введении диссипации координаты положений равновесия? Найдите значение параметра затухания  $\gamma_0$ , при котором происходит изменение типа устойчивых неподвижных точек. Постройте фазовый портрет системы для случая  $\gamma < \gamma_0$ . Сколько аттракторов имеет система? Заштрихуйте на отдельном рисунке на фазовой плоскости соответствующие бассейны притяжения. Обсудите роль сепаратрис с точки зрения определения бассейнов притяжения.