

Лекция 3

Фундаментальные эффекты, к которым приводит нелинейность

Как мы уже отмечали в предыдущих лекциях, особенность нелинейных систем состоит в том, что в них *колебания разной амплитуды могут быть существенно различными по своим характеристикам*, например, по виду зависимостей динамических переменных от времени. В этой лекции мы собираемся обсудить на качественном уровне некоторые весьма общие конкретные эффекты, посредством которых может проявлять себя нелинейность — *неизохронность, ангармоничность, мультистабильность, автоколебания, динамический хаос*.

Неизохронность

Одно из распространенных проявлений нелинейности состоит в том, что период колебаний оказывается зависящим от амплитуды. Это свойство многих нелинейных колебательных систем называют *неизохронностью*.

Говорят, что Галилей обнаружил постоянство периода колебаний маятника, наблюдая колебания люстры в соборе во время церковной службы и используя для измерения времени собственный пульс. Это послужило толчком к изобретению маятниковых часов. Позднее выяснилось, что на самом деле период колебаний маятника *зависит* от амплитуды, и его можно считать практически постоянным только при углах отклонения малых в сравнении с π .

В самом деле, момент возвращающей силы зависит от угла отклонения по закону синуса (рис. 3.1), но при малых углах эта зависимость хорошо аппроксимируется линейной. В этом же приближении постоянными будут частота и период колебаний. С увеличением угла отклонения, возвращающая сила становится меньше той, какой она была бы в случае линейной зависимости. Следовательно, при движении маятника от крайнего положения скорость будет нарастать медленнее, чем это имело бы место для линейной системы, и время, через которое он достигнет нижней точки, оказывается несколько большим. Сказанное становится особенно очевидным, если представить себе колебания такой амплитуды, что в крайней точке маятник почти достигает вертикального положения, с грузом наверху (рис. 3.1г). В этом состоянии, близком к неустойчивому равновесию, он как бы замирает, поскольку момент возвращающей силы очень мал, после чего начинает медленно разгоняться с тем, чтобы проскочить нижнюю точ-

ку, снова достигнуть наибольшего отклонения, но уже в другую сторону, и так далее. За амплитуду колебаний естественно принять угол максимального отклонения маятника при колебаниях. Зависимость периода колебаний от амплитуды будет выглядеть как показано на рис. 3.1в. Когда величина угла приближается к π , период стремится к бесконечности.

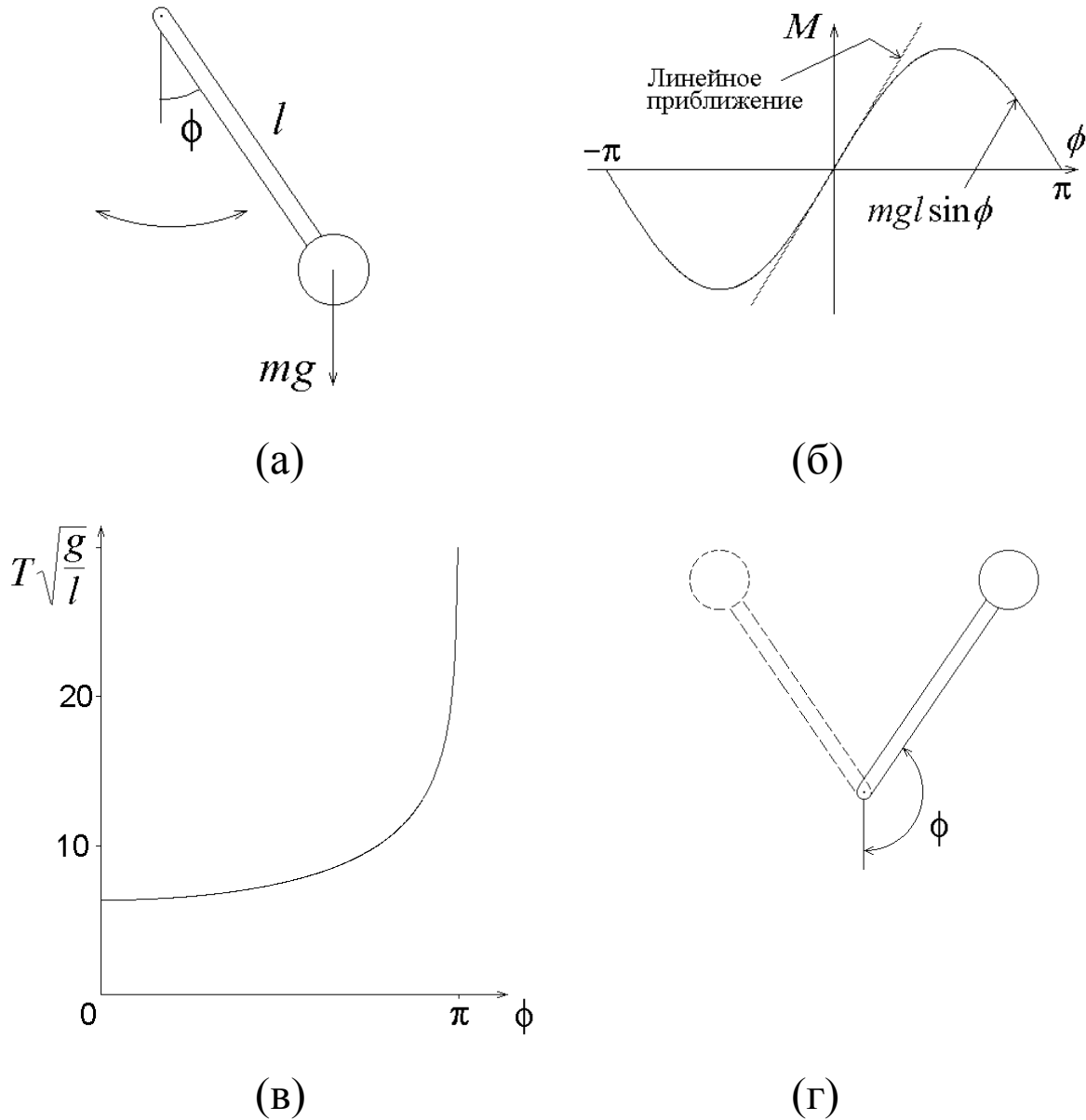


Рис.3.1. Маятник как пример неизохронной колебательной системы:

- определение основных параметров (а),
- зависимость момента возвращающей силы от угла отклонения (б),
- зависимость периода колебаний от амплитуды – угла максимального отклонения (в),
- иллюстрация колебаний с отклонением на большой угол (г).

В качестве второго примера рассмотрим мячик, прыгающий вверх-вниз на горизонтальной поверхности, причем удар предполагаем идеально упругим (рис. 3.2). Это,

несомненно, колебательный процесс. Высоту подпрыгивания примем за амплитуду. Время падения тела в поле тяжести с высоты A без начальной скорости равно $\sqrt{2A/g}$ и совпадает со временем подъема, так что период колебаний составит $T = 2\sqrt{2A/g}$, т.е. он пропорционален корню квадратному из амплитуды. Таким образом, колебания не-изохронные.

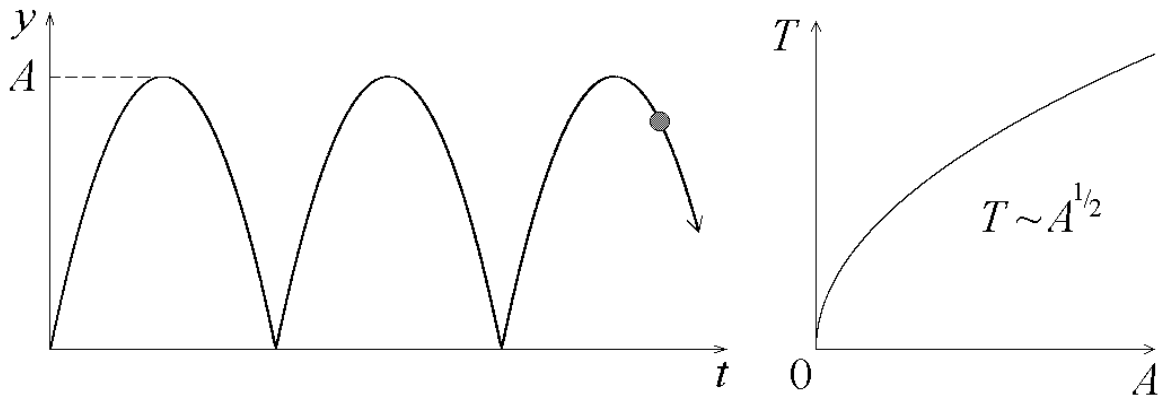


Рис. 3.2. Зависимость координаты от времени при колебаниях мячика, прыгающего на горизонтальной поверхности в поле тяжести и зависимость периода от амплитуды — высоты подскока.

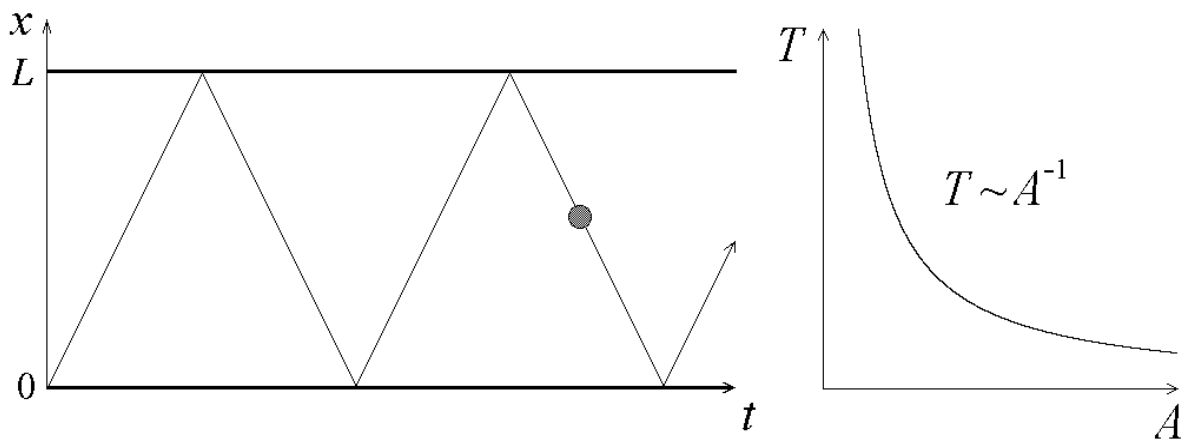


Рис. 3.3. Зависимость координаты от времени при колебаниях частицы между двумя параллельными упругими стенками и зависимость периода колебаний от амплитуды, за величину которой принята скорость, $A = v$.

Следующий пример — частица, совершающая одномерное движение между двумя упругими стенками, расположенными на расстоянии L друг от друга (рис. 3.3). В предположении, что потери энергии отсутствуют, движение, очевидно, периодическое. Поскольку пространственный размах колебаний не зависит от их интенсивности, в качестве определения амплитуды более целесообразно принять величину скорости в промежутках времени между соударениями частицы со стенками. В данном случае именно

именно это вполне естественная и разумная характеристика интенсивности колебаний. Период колебаний будет составлять $T = 2L/A$, т.е. при нашем определении амплитуды период обратно ей пропорционален.

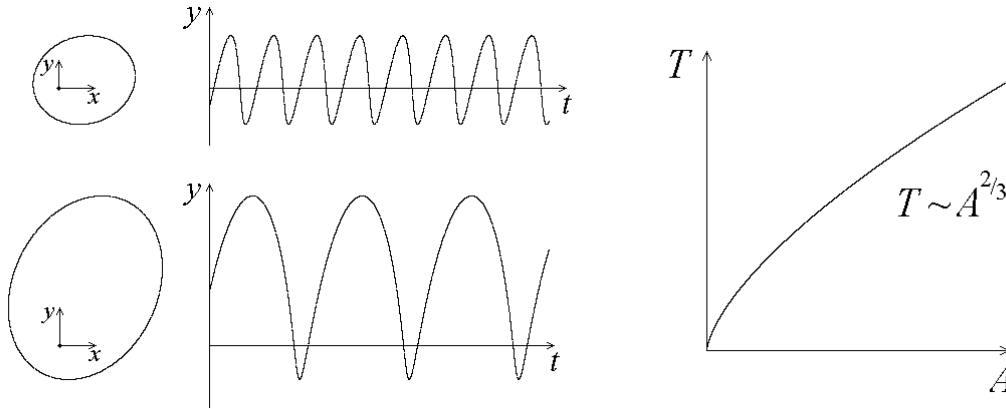


Рис. 3.4. Движение планеты по Кеплеру как пример неизохронного колебательного процесса: период колебаний пропорционален $A^{2/3}$, где A — большая полуось эллиптической орбиты.

Движение планеты по орбите вокруг Солнца (рис. 3.4) тоже можно рассматривать как пример неизохронного колебательного процесса. Действительно, в проекции на любое направление в плоскости орбиты изображение планеты с очевидностью совершает периодические колебания. Согласно закону Кеплера, период этих колебаний пропорционален $A^{2/3}$, где A — большая полуось эллиптической орбиты. Это соотношение выражает зависимость периода от амплитуды, в качестве каковой фигурирует величина A .

Рассмотрим теперь электрон, движущийся в магнитном поле (рис. 3.5). В отсутствие продольной составляющей скорости движение происходит по окружности, при этом в проекции на одну из координатных осей наблюдается колебательный процесс. Поскольку в качестве центростремительной силы выступает сила Лоренца, имеем

$$mv^2/r = evB \quad (3.1)$$

где v — скорость электрона, r — радиус орбиты, B — величина индукции магнитного поля, e и m — соответственно, заряд и масса электрона. При учете релятивистских эффектов масса зависит от скорости как $m = m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$. Подставим это выражение в (3.1) и положим $v = \omega r$, где ω — угловая скорость, она же круговая частота колебаний, связанная с периодом соотношением $T = 2\pi/\omega$. Выражая из (3.1) величину ω через остальные параметры задачи, имеем

$$\omega = \frac{eB}{m_0} \left(1 + \frac{e^2 B^2}{m_0^2 c^2} r^2 \right)^{-1/2}, \quad T = \frac{2\pi m_0}{eB} \sqrt{1 + \frac{e^2 B^2}{m_0^2 c^2} r^2}. \quad (3.2)$$

Таким образом, частота колебаний уменьшается, а период растет с увеличением радиуса орбиты, т.е. амплитуды колебаний.

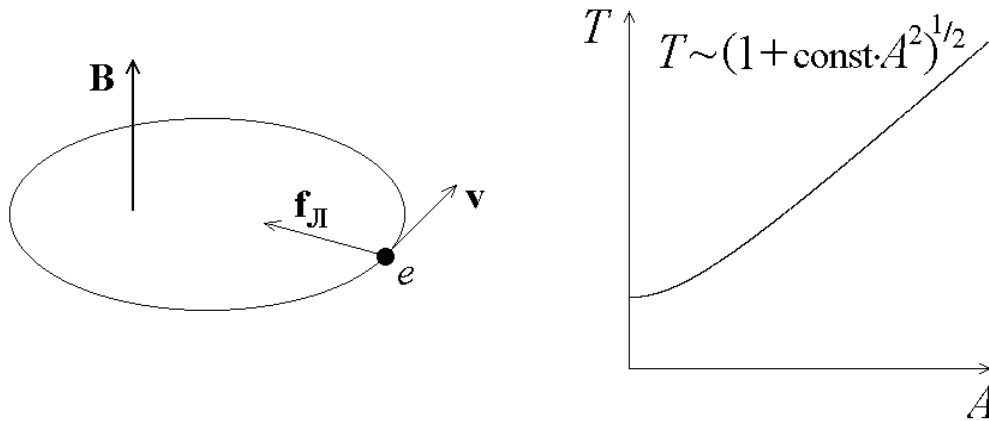


Рис. 3.5. Электрон, движущийся по круговой орбите в магнитном поле как пример неизохронного осциллятора. При малом радиусе орбиты (малая кинетическая энергия частицы) период обращения практически постоянен, но из-за релятивистского увеличения массы период растет с увеличением радиуса орбиты.

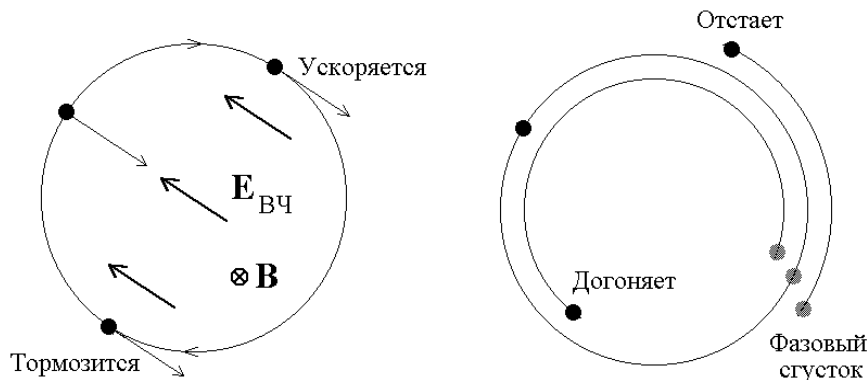


Рис. 3.6. К пояснению механизма фазовой группировки электронов, используемой в гиротронах (мазерах на циклотронном резонансе).

Неизохронность электронов-осцилляторов находит применение для генерации и усиления электромагнитного излучения в так называемых гиротронах или лазерах на циклотронном резонансе. Рассмотрим ансамбль электронов, обладающих определенной начальной энергией (рис. 3.6). Пусть они помещены в магнитное поле перпендикулярное плоскости рисунка, и находятся в резонаторе, где присутствует высокочастотное электрическое поле, осциллирующее с частотой близкой к частоте вращения электронов. Электрон, попавший в тормозящую фазу электрического поля, уменьшает свою кинетическую энергию и, соответственно, радиус орбиты. Частота вращения увеличивается, и он догоняет по азимутальной координате невозмущенный электрон. Электрон, попавший в ускоряющую фазу, увеличивает свою энергию, становится более массивным, и отстает по азимутальной координате. В результате электроны груп-

пируются по фазе. Если на следующем этапе взаимодействия образовавшийся фазовый сгусток попадет в тормозящую фазу высокочастотного поля, то энергия пучка будет передаваться полю.

Задача 3.1. Грузик массы m прикреплен к пружине жесткости k и может двигаться по горизонтальной плоскости без трения (рис. 3.7).

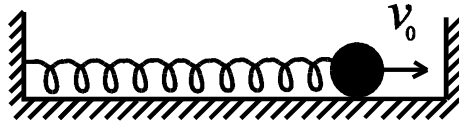


Рис. 3.7

Грузику ударом сообщают скорость v_0 . Расстояние от грузика до стенки l , удары о стенку абсолютно упругие. Определите зависимость периода колебаний от величины начальной скорости v_0 .

Задача 3.2. На рис. 3.8 изображены три варианта симметричной потенциальной ямы, характеризующихся одним и тем же периодом линейных колебаний T . Штриховая линия соответствует закону $U = kx^2$. Возрастает или убывает период колебаний с ростом амплитуды при движении частицы в двух других ямах?

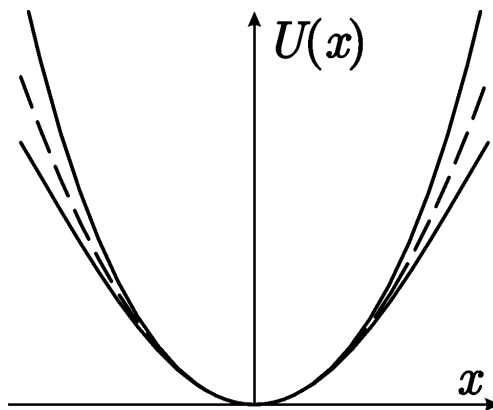


Рис. 3.8

Задача 3.3. Исследуйте колебания материальной точки массы m в потенциальной яме вида $U(x) = k|x|^n$. Определите период колебаний с точностью до константы. Покажите, что для $n=2$ и малые, и большие колебания изохронны. Покажите, что для $n \neq 2$ как большие, так и малые колебания неизохронны. Определите для $n \neq 2$ характер зависимости периода колебаний от амплитуды при её стремлении к нулю.

Ангармоничность колебаний и генерация гармоник

Как известно, в линейном консервативном осцилляторе, описываемом уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (3.3)$$

изменение во времени динамической переменной происходит по синусоидальному, или гармоническому закону:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (3.4)$$

В нелинейной системе, совершающей периодические колебания, их форма обычно отличается от синусоиды. Такие колебания называют *ангармоническими*.

На рис. 3.9 показан вид временных зависимостей угла отклонения маятника при разной амплитуде колебаний. При малой амплитуде колебания близки к гармоническим. Это естественно, поскольку при малых углах отклонения маятник приближенно сводится к линейному осциллятору (3.3). Однако при больших амплитудах форма колебаний становится заметно отличной от синусоиды, т.е. колебания оказываются ангармоническими. «Глазомерный» способ различать гармонические и ангармонические колебания, конечно же, несовершенен. Чтобы придать этому различию более глубокий смысл и количественный аспект, необходимо обратиться к *спектральному представлению колебаний*.

Известно, что любую разумную с физической точки зрения периодическую функцию можно разложить в ряд Фурье. Пусть $x(t)$ — функция периода T , тогда

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{2\pi i m t / T}, \quad (3.5)$$

где

$$c_m = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-2\pi i m t / T} dt. \quad (3.6)$$

Для того чтобы в любой момент t величина $x(t)$ была действительной, коэффициенты разложения должны, очевидно, удовлетворять условию

$$c_m = c_{-m}^*, \quad (3.7)$$

где звездочка обозначает комплексное сопряжение. Если мы сгруппируем члены ряда (3.5) по парам, отвечающим одинаковым по абсолютной величине значениям индекса m , то разложение Фурье можно записать в виде

$$x(t) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(m\omega t + \varphi_m), \quad (3.8)$$

где введены обозначения $\omega = 2\pi/T$ и

$$A_0 = c_0, \quad A_m = |c_m|, \quad \varphi_m = \arg c_m. \quad (3.9)$$

Полезное замечание о вычислении аргумента комплексного числа $x + iy$: вместо общепринятого способа, когда полагают $\varphi = \arctg(y/x)$ при $x > 0$ и $\varphi = \arctg(y/x) + \pi$ при $x < 0$ можно рекомендовать более удобный эквивалентный способ, основанный на формуле

$$\arg(x + iy) = 2 \arctg \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (3.10)$$

Применение этой формулы не требует анализа того, в какую область попали x и y .

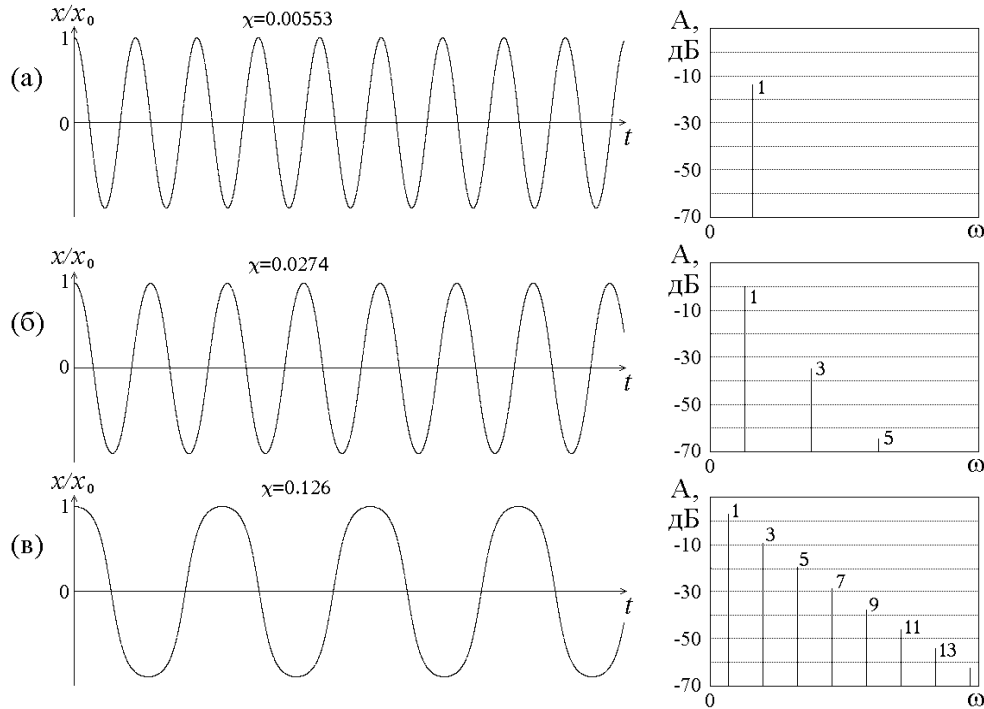


Рис. 3.9. Справа – зависимости угловой координаты маятника от времени при начальном отклонении, соответственно, $x_0=1$ (а), 2 (б) и 3(в), указаны числовые значения коэффициента нелинейных искажений. Справа – соответствующие спектры, где по оси ординат использован логарифмический масштаб, и амплитуды гармоник даны в децибелах. Цифрами обозначены номера гармоник, обратите внимание, что присутствуют только нечетные гармоники. Графики получены путем численного решения уравнения динамики маятника на компьютере.

Член ряда (3.8) с нулевым индексом отвечает постоянной составляющей, которую часто целесообразно бывает исключить из рассмотрения надлежащим выбором начала отсчета для динамической переменной x . Если отличен от нуля один только первый член суммы, то это соответствует гармоническим колебаниям, которые, с общей точки зрения, представляют собой очень специальный случай периодического колебательно-го процесса. Если же сумма содержит другие ненулевые члены, то колебания ангармонические, поскольку их форма с очевидностью отличается от простой синусоиды. Чаше всего самую большую амплитуду имеет первый член $A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$. Его считают ос-

новой гармонической составляющей процесса, и говорят о ней как о *первой гармонике*. Последующие члены ряда отвечают *второй гармонике* $A_2 \cos(2\omega t + \varphi_2)$, *третьей гармонике* $A_3 \cos(3\omega t + \varphi_3)$ и т.д. Очевидно, частота колебаний m -ой гармоники равна $m\omega$.

В качестве количественной характеристики отклонения колебательного процесса от гармонических колебаний в технике используют так называемый *коэффициент нелинейных искажений*. Он определяется как отношение

$$\chi = \frac{\sqrt{A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + A_5^2 + \dots}}{A_1}. \quad (3.11)$$

Итак, со спектральной точки зрения, отличие колебаний по форме от синусоиды — ангармоничность трактуется как присутствие составляющих с частотами 2ω , 3ω , ..., — высших гармоник. Вопрос о происхождении ангармоничности есть вопрос о причине возникновения (генерации) высших гармоник. Если представить колебательную систему построенной из отдельных составных элементов, то появление высших гармоник можно связать с *преобразованием спектра периодического сигнала нелинейными элементами*. Обсудим подробнее этот простой, но важный для теории колебаний общий принцип.

Пусть мы имеем элемент, для которого входной сигнал дается переменной $x(t)$, выходной — переменной $y(t)$, а связывающая их нелинейная характеристика раскладывается в ряд Тейлора

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \quad (3.12)$$

Первый член в этом разложении линейный, второй и третий представляют, как говорят, *квадратичную* и *кубическую нелинейность*, соответственно.

Предположим, что входной сигнал гармонический, $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$, т.е. в спектре присутствует только одна частотная составляющая, на частоте ω . Подставим выражение для $x(t)$ в (3.12). При помощи известных тригонометрических формул степени синуса могут быть представлены в виде линейных комбинаций гармонических функций. В силу того, что

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin(2\alpha - \frac{\pi}{2}), \quad (3.13)$$

член, отвечающий за квадратичную нелинейность, принимает вид

$$\begin{aligned} a_2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) &= \frac{1}{2} a_2 A^2 (1 - \cos(2\omega t + 2\varphi)) \\ &= \frac{1}{2} a_2 A^2 + \frac{1}{2} a_2 A^2 \sin(2\omega t + 2\varphi - \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Далее, поскольку

$$\sin^3 \alpha = \frac{3}{4} \sin \alpha - \frac{1}{4} \sin 3\alpha, \quad (3.15)$$

то член, соответствующий кубической нелинейности, переписывается в виде

$$A^3 \sin^3(\omega t + \varphi) = \frac{3}{4} a_3 A^3 \sin(\omega t + \varphi) + \frac{1}{4} a_3 A^3 \sin(3\omega t + 3\varphi + \pi). \quad (3.16)$$

Собирая все члены, имеем окончательно:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} a_2 A^2 + (a_1 A + \frac{3}{4} a_3 A^3) \sin(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} a_2 A^2 \sin(2\omega t + 2\varphi - \frac{\pi}{2}) \\ &+ \frac{1}{4} \sin(3\omega t + 3\varphi + \pi) + \dots \end{aligned} \quad (3.17)$$

Из проведенных простых выкладок видно, что присутствие на выходе нелинейного элемента гармонических составляющих с частотами, отличными от частоты входного сигнала, обязано нелинейности характеристики элемента (рис. 3.10). При этом *квадратичная нелинейность* отвечает за появление *постоянной составляющей* (в радиотехнике об этом эффекте говорят как о *детектировании*) и *второй* гармоники. Обратите внимание, что соответствующие слагаемые в формуле (3.17) пропорциональны коэффициенту квадратичной нелинейности a_2 и квадрату входной амплитуды. *Кубическая нелинейность* обеспечивает нелинейную добавку к амплитуде основной гармоники и возникновение *третьей* гармоники. Заметьте, что соответствующие слагаемые пропорциональны коэффициенту кубической нелинейности a_3 и кубу входной амплитуды.

Одной из красивейших иллюстрацией нелинейного преобразования частот служит следующий оптический эксперимент. Луч электромагнитного излучения инфракрасного диапазона, невидимый глазом (длина волны 1,06 мкм, частота $2,8 \cdot 10^{14}$ Гц), генерируется лазером на неодимовом стекле и проходит через кристалл ниобата бария. При достаточно большой интенсивности в результате нелинейного квадратичного преобразования электромагнитных колебаний в кристалле генерируется вторая гармоника с частотой вдвое больше исходной, $5,6 \cdot 10^{14}$ Гц. Эта частота соответствует уже видимому диапазону оптического излучения, и на выходе из кристалла наблюдается луч зеленого цвета (длина волны 0,53 мкм). Аналогичный эффект наблюдается в акустике. Имея источник достаточно интенсивный источник звука определенной частоты f_0 можно обнаружить, что на достаточно большом расстоянии от источника акустические колебания содержат вторую, третью и другие гармоники, т.е. составляющие с частотами $2f_0$, $3f_0$ и т.д. Их можно фиксировать с помощью аппаратуры или воспринять на слух. Еще один пример относится к физиологии слуха. Как обнаружено в свое время Гельмгольцем, генерация гармоник сопровождается собственно процессом восприятия ухом монохроматического звука при его большой амплитуде. (При этом, чтобы различить высшие гармоники на фоне интенсивного основного тона нужно обладать достаточно тренированным музыкальным слухом!)

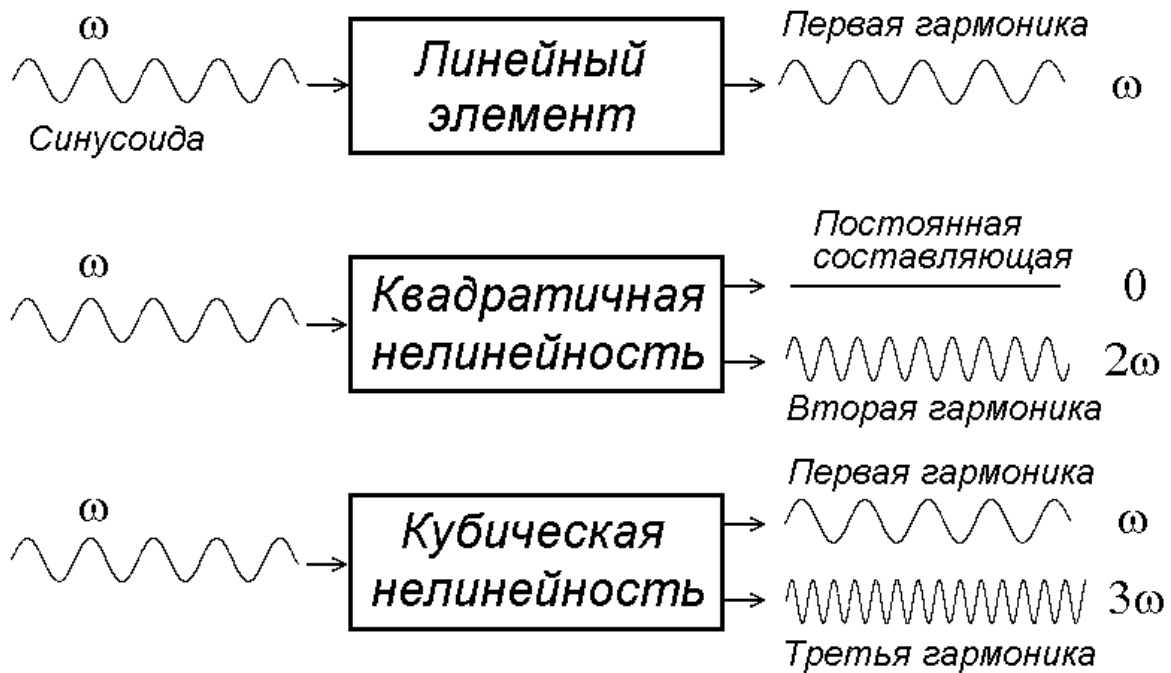


Рис. 3.10. Преобразование входного гармонического сигнала элементами с линейной, квадратичной и кубической характеристиками

Задача 3.4. На обложке журнала “*Scientific American*” за июль 1963 года изображена эффектная фотография, на которой показан пучок красного цвета с длиной волны 6940 Å, падающий на кристалл. С противоположной стороны кристалла выходит пучок синего цвета с длиной волны 3470 Å. Каков характер нелинейности, которая приводит к подобному преобразованию света?

Задача 3.5. В книге Ф. Крауффорда “Волны” описан следующий опыт. Возьмем два камертона, соответствующие двум нотам с частотами 440 Гц и 523 Гц. Возбудив их, можно услышать не только две эти ноты, но и колебание, близкое к частоте некоторой третьей ноты. Частота третьей ноты 349 Гц. Объяснение этого эффекта состоит в нелинейности уха. Каков характер нелинейности, проявившейся в этом опыте?

Комбинационные составляющие

Пусть теперь на вход нелинейного элемента подается сигнал, представляющий собой суперпозицию двух гармонических составляющих с частотами ω_1 и ω_2 :

$$x(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi). \quad (3.18)$$

Предположим сначала, что нелинейная характеристика квадратичная, $y = a_2 x^2$. Подставляя сюда выражение для $x(t)$, получаем

$$y(t) = A_1^2 \sin^2(\omega_1 t + \varphi_1) + 2A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) + A_2^2 \sin^2(\omega_2 t + \varphi_2). \quad (3.19)$$

Используем известные из тригонометрии формулы, и преобразуем квадраты и произведения синусов так, чтобы выражение содержало элементарные тригонометрические функции только в первой степени. Имеем:

$$y(t) = \frac{1}{2} A_1^2 + \frac{1}{2} A_2^2 - \frac{1}{2} A_1^2 \cos(2\omega_1 t + \varphi_1) - \frac{1}{2} A_2^2 \cos(2\omega_2 t + \varphi_2) + A_1 A_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2)] - A_1 A_2 \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + (\varphi_1 + \varphi_2)]. \quad (3.20)$$

Разумеется, в этом выражении присутствуют члены, соответствующие результату детектирования обеих частотных составляющих, а также члены, отвечающие вторым гармоникам, соответственно, $\frac{1}{2} A_{1,2}^2$ и $\frac{1}{2} A_{1,2}^2 \cos(2\omega_{1,2} t + \varphi_{1,2})$. Кроме того, появились составляющие на суммарной и разностной частоте $\omega_1 + \omega_2$ и $\omega_1 - \omega_2$. Их амплитуда дается произведением амплитуд составляющих входного сигнала, $A_1 A_2$. О них принято говорить как о *комбинационных составляющих* выходного сигнала.

Если входной сигнал содержит множество составляющих с частотами $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$, то в результате квадратичного нелинейного преобразования получатся комбинационные составляющие со всевозможными частотами $\omega_m \pm \omega_n$, амплитуды которых будут определяться произведением соответствующих амплитуд A_m и A_n . Составляющая на частоте $\omega_m \pm \omega_n$ интерпретируется как результат взаимодействия компонент входного сигнала с частотами ω_m и ω_n . Заметим, что постоянную составляющую A_m^2 и вторую гармонику на частоте $2\omega_m$ можно трактовать как результат *самовоздействия* частотной составляющей ω_m .

В радиотехнике преобразование сигналов сложного спектрального состава на квадратичной нелинейности используют для детектирования сигналов, понимая под этим «перенос» спектра сигнала из области высоких частот в область низких по возможности без искажения его формы. Предполагается, что исходный сигнал имеет узкополосный спектр ширины $\Delta\omega$ вблизи некоторой центральной частоты ω_0 . В результате преобразования на нелинейном квадратичном элементе получаются две компоненты спектра, сосредоточенные вблизи нуля и вблизи частоты $2\omega_0$. Далее, подаем сигнал на вход линейной цепи, которая практически не пропускает высокие частоты (низкочастотный фильтр). На выходе получаем сигнал со спектром в области низких частот. Если при этом исходный сигнал имел симметричный спектр, что соответствует *амплитудной модуляции*, то форма спектра выходного сигнала будет воспроизводить форму «половинки» спектра исходного сигнала.

Аналогично тому, как мы рассмотрели возникновение комбинационных частот при квадратичном нелинейном преобразовании, можно проанализировать случай кубической нелинейности. Читателю предлагается проделать это самостоятельно. Если входной сигнал содержит множество составляющих с частотами $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$, то действие

кубической нелинейности приводит к появлению комбинационных составляющих с частотами $\omega_m \pm \omega_n \pm \omega_k$. Индексы m, n, k – это целые числа от 1 до N , которые могут быть разными или одинаковыми. Амплитуды комбинационных составляющих определяются произведением амплитуд A_m, A_n и A_k . В частности, самовоздействие одной из гармонических составляющих входного сигнала ω_m выражается в появлении компоненты выходного сигнала на той же частоте ($\omega_m + \omega_m - \omega_m$) и третьей гармоники ($\omega_m + \omega_m + \omega_m$).

Задача 3.6. Нелинейная пружина одним концом прикреплена к стенке (рис. 3.11). Вторым концом пружины перемещают вдоль горизонтальной оси по закону $x = x_1 \cos(\omega t) + x_2 \cos(2\omega t)$. Определите спектр силы, действующей на стенку. Пружина невесома, сила упругости F зависит от координаты x по закону $F = kx + cx^3$. Сколько компонент присутствует в спектре?

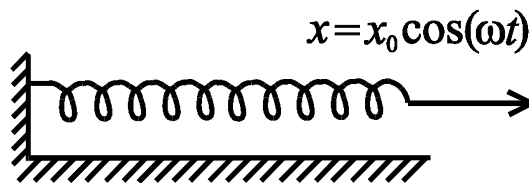


Рис. 3.11

Задача 3.7. Вольт-амперная характеристика некоторого элемента имеет вид

$$I = \begin{cases} 0, & U < 0, \\ U/R, & U \geq 0. \end{cases}$$

На элемент подано напряжение $U = U_0 \cos(\Omega t)$. Определите спектр тока. По какому закону спадают с ростом частоты ω далекие фурье-компоненты тока? С какими особенностями нелинейного преобразования связан этот закон?

Задача 3.8. Исследуйте зависимость спектра колебаний системы из задачи 3.1 от величины v_0 . По какому закону в нелинейном режиме колебаний спадают с ростом частоты ω далекие фурье-компоненты? С какими особенностями нелинейности системы связан этот закон?

Автоколебания

Одним из замечательных и нетривиальных проявлений нелинейности служит такой феномен как *автоколебания*. Это самопроизвольно возникающий в некоторых диссипативных системах колебательный процесс, характеристики которого определяются свойствами самой системы и не зависят от конкретных начальных условий.

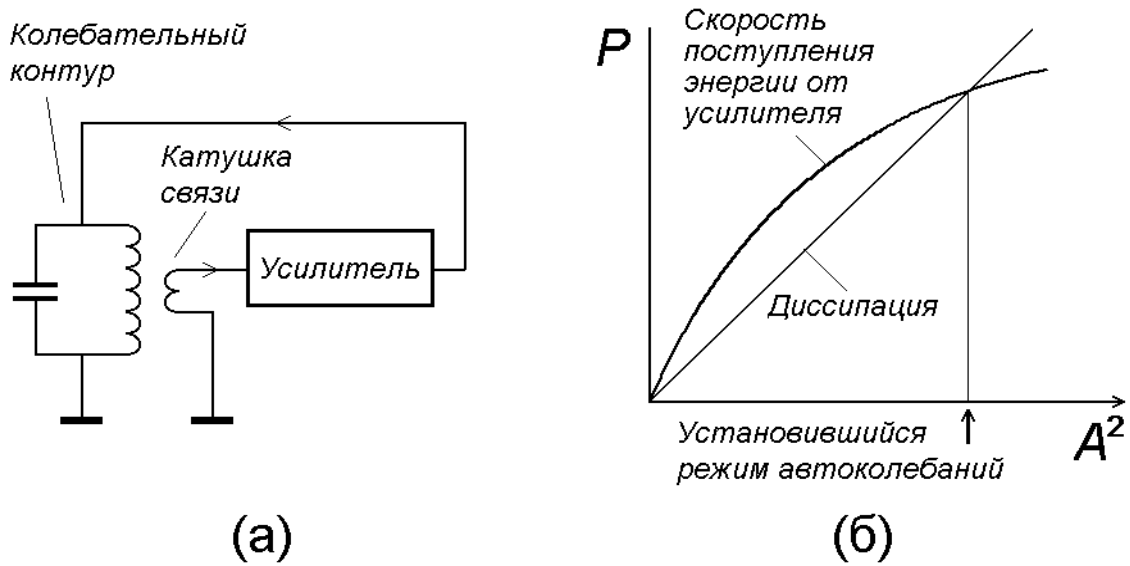


Рис. 3.12. (а) Схема электронного генератора; (б) график зависимости от квадрата амплитуды мощности энергетических потерь в контуре (прямая линия) и поступления энергии от усилителя (кривая линия). Точка пересечения определяет установившуюся амплитуду автоколебаний.

Классический пример автоколебательной системы – электронный генератор, схематически изображенный на рис. 3.12а. Схема содержит колебательный контур, в котором имеются потери энергии. При наличии в контуре колебаний, за счет электромагнитной индукции возникает переменное напряжение на катушке связи, и это напряжение подается на вход электронного усилителя (конкретная природа усилителя принципиальна, он может быть реализован на электронной лампе, как в исторически первых версиях устройства, или на транзисторах). Сигнал, полученный на выходе усилителя, подается вновь в колебательный контур так, чтобы способствовать раскачке присутствующих там колебаний: схема построена так, что реализуется, как говорят положительная обратная связь. Если коэффициент усиления достаточно велик, то колебания малой амплитуды в контуре будут раскачиваться. По мере увеличения амплитуды будут нарастать и потери энергии за счет диссипации, так что в конце концов средняя за период колебаний мощность потерь достигнет уровня мощности, поступающей в контур от усилителя. Это приведет к стабилизации амплитуды на определенном уровне, и в системе будет протекать самоподдерживающийся колебательный процесс – до тех пор, пока функционирует усилитель. Энергия необходимая для поддержания процесса черпается из неколебательного источника, а именно, из батареи или внешней сети, питающей усилитель. Автоколебательный процесс – всегда принципиально нелинейный феномен. Это видно хотя бы из того, что с ним ассоциируется определенный характерный уровень амплитуды, реализующийся в установившемся режиме. Если бы система

была линейной, то колебательные процессы с любым произвольным уровнем амплитуды должны были бы протекать одинаково.

Задача 3.9. Прodelайте следующий эксперимент. Пустите в ванну воду из-под крана. Внесите под струю воды шарик от пинг-понга. Пронаблюдайте поведение шарика. Проведите наблюдения для разных значений скорости струи, вытекающей из крана. Опишите поведение шарика на языке теории колебаний. Попробуйте объяснить поведение шарика.

Бифуркации, мультистабильность и гистерезис

Как мы уже отмечали во вводной лекции, наряду с динамическими переменными, зависимость которых от времени составляет сущность колебательного процесса, при рассмотрении колебательных систем приходится иметь дело также с *параметрами*. Это величины, которые считаются постоянными во времени, но от задания которых может зависеть характер реализующегося в системе режима.

Представьте себе, что система заключена в ящик, на котором имеется несколько ручек настройки. Устанавливая ручки в различные положения, мы можем, вообще говоря, наблюдать разные по характеру режимы — стационарные состояния, периодические колебания, непериодические колебания.

Качественное изменение режима при изменении параметра называют *бифуркацией*. Подчеркнем, что речь идет принципиально о столь медленном (адиабатическом) изменении параметра, что режим динамики системы в каждый момент, т.е. при каждом определенном значении параметра, можно считать установившимся. Процесс изменения параметров можно мыслить как движение по определенной траектории в пространстве, где по осям координат отложены параметры системы. Такое геометрическое представление особенно удобно и наглядно, когда параметров два, и пространство параметров двумерное.

Не путайте *пространство параметров* с фазовым пространством. В первом случае по осям координат откладываются параметры, а во втором — динамические переменные системы. Движение изображающей точки по траектории в фазовом пространстве — это результат собственной динамики системы. Траектория же в пространстве параметров задается исследователем, желающим знать, как эволюционирует при соответствующем изменении параметров динамическое поведение системы.

Одна из распространенных и хорошо изученных бифуркаций связана с возникновением автоколебаний. Если в схеме на рис. 3.12а коэффициент усиления усилителя мал, и его не хватает для компенсации потерь энергии в колебательном контуре, то система приходит после затухающих колебаний в тривиальное состояние равновесия. Если постепенно увеличивать коэффициент усиления (или коэффициент обратной связи), то

зи), то в некоторый момент происходит бифуркация, – малые колебания вблизи состояния равновесия перестают затухать и становятся нарастающими. В этих условиях любое случайное начальное возмущение (например, возникшее из всегда присутствующих в физической системе шумов) даст «затравку» колебательному процессу. Появятся сначала колебания малой амплитуды, затем амплитуда будет нарастать до тех пор пока она не стабилизируется на определенном уровне из-за нелинейных эффектов. Известно, что при переходе параметра через критическое, или бифуркационное, значение амплитуда зависит от параметра по универсальному закону, пропорционально корню квадратному из надкритичности (рис. 3.12б). Описанную здесь на элементарном уровне бифуркацию рождения периодических автоколебаний называют *бифуркацией Андронова — Хопфа*. Формальное содержание этой бифуркации состоит в том, что существовавшая ранее в фазовом пространстве системы неподвижная точка теряет устойчивость, а аттрактором становится замкнутая фазовая траектория – предельный цикл.

Чтобы познакомиться с дальнейшими примерами бифуркаций, обратимся к одной из самых простых колебательных систем, представленной шариком в лунке (рис. 3.13). В присутствии трения шарик будет совершать колебания вблизи точки минимума, приходя, в конце концов, в состояние устойчивого равновесия. Можно рассмотреть более сложный случай и предположить, что профиль имеет более одного минимума, т.е. содержит несколько лунок. Тогда устойчивых состояний равновесия тоже будет несколько. В зависимости от того, какой была начальная координата и скорость шарика, он попадет в итоге в одну из лунок. В данном случае мы имеем дело с колебательной системой, имеющее несколько разных сосуществующих *аттракторов*, в качестве которых в нашем простом примере выступают состояния устойчивого равновесия. Каждому аттрактору отвечает определенный *бассейн притяжения* – область значений начальных координаты и скорости, соответствующая тому, что в итоге частица окажется в определенной лунке.

Если какая-нибудь колебательная система характеризуется наличием нескольких разных потенциально возможных установившихся состояний или колебательных режимов, и возникновение того или иного из них зависит от задания начальных условий, то говорят, что имеет место *мультистабильность*. В линейной системе мультистабильность невозможна. В частности, в нашем примере с шариком наличие у профиля нескольких ямок с очевидностью требует, чтобы зависимость возвращающей силы от координаты частицы была нелинейной.

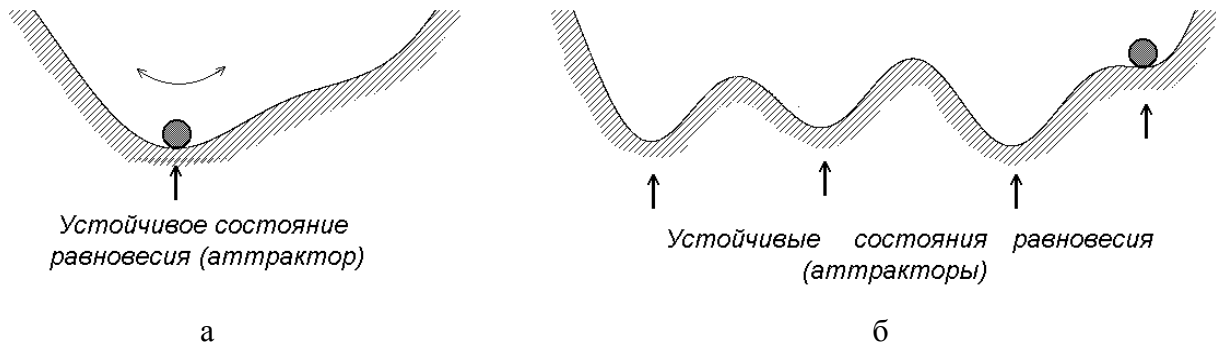


Рис.3.13. Шарик в лунке в случае одного (а) и нескольких (б) устойчивых положений равновесия.

Предположим теперь, что форму профиля можно регулировать, изменяя параметры системы, так что в процессе этой деформации могут появляться или пропадать локальные минимумы (рис. 3.14). Одно из интересных явлений будет наблюдаться в ситуации, когда ямка, в которой располагается шарик, сближается с локальным максимумом, сливается с ним, и исчезает. Это *бифуркация слияния устойчивого (минимум) и неустойчивого (максимум) состояний равновесия* (рис. 3.14). После бифуркации локальный минимум исчезает, и система должна скачком перейти в новое состояние, достаточно удаленное от исходного. Говоря о скачке, мы имеем в виду, что координата частицы претерпит существенное изменение в итоге процесса перехода в новое состояние. Что касается развития этого процесса во времени, то на начальной стадии он будет достаточно медленным, так как локально профиль в области нахождения частицы практически плоский.

Предположим, что в нашем примере с шариком профиль ямы задан уравнением

$$y = x^4 - Ax^2 + Bx, \quad (3.21)$$

где A и B – параметры. На рис. 3.15 представлена карта плоскости параметров и диаграммы, показывающие вид потенциального рельефа в нескольких характерных точках. На плоскости параметров имеется область, ограниченная двумя ветвями кривой складок, где потенциальный рельеф характеризуется наличием двух локальных минимумов. Линии, которые разграничивают области существования одного или двух устойчивых состояний, обозначены на рис. 3.15 как *линии складок*. Они сходятся в точке сборки, образуя характерное «острие».

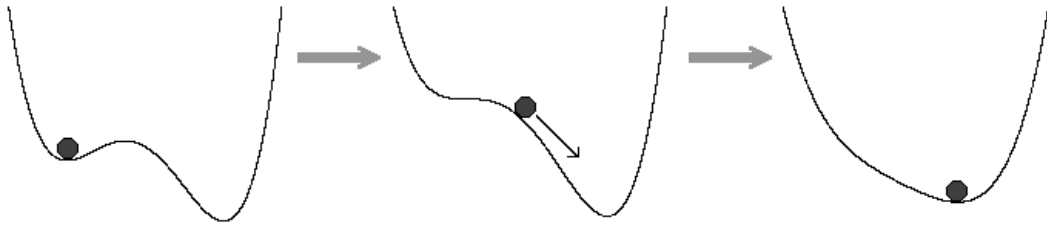


Рис. 3.14. Скачкообразное изменение состояния равновесия системы «шарик в лунке» при медленном изменении профиля.

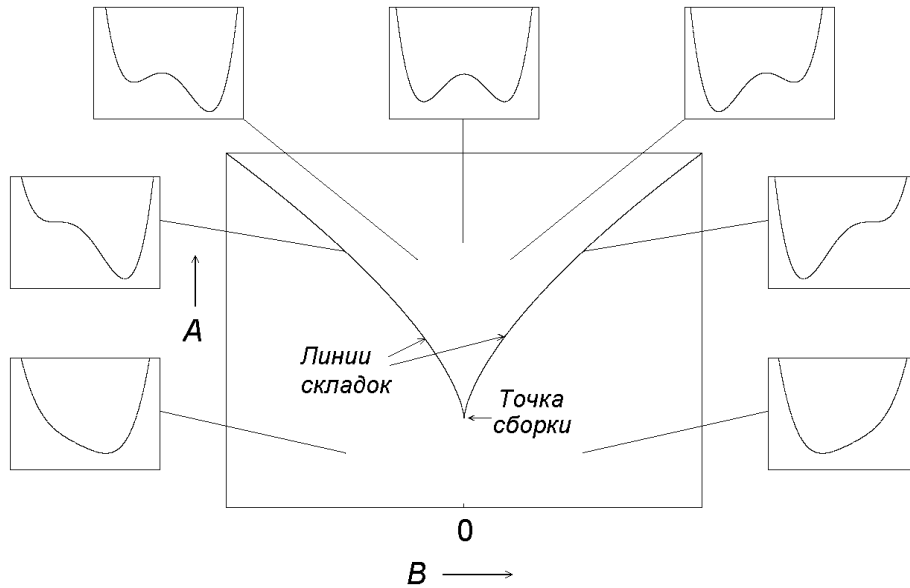


Рис.3.15. Карта плоскости параметров (в центре) и диаграммы, показывающие форму потенциального рельефа в характерных точках (по периферии). Между двумя ветвями линии складок располагается область бистабильности.

Поясним происхождение терминологии. На рис. 3.16 показана в виде трехмерного графика зависимость координаты состояния равновесия от параметров A и B . Она определяется из условия

$$y'(x) = 0, \text{ или } 4x^3 - 2Ax + B = 0. \quad (3.22)$$

Можно видеть, что пограничные линии на плоскости параметров отвечают проекции складок изображенной поверхности на координатную плоскость (A, B) . Алгебраически, эти линии получаются из условия наличия у уравнения (3.22) двух совпадающих корней, т.е. из системы уравнений

$$\begin{cases} 4x^3 - 2Ax + B = 0, \\ 12x^2 - 2A = 0. \end{cases} \quad (3.23)$$

Исключая из второго уравнения x , получаем $x = \pm\sqrt{A/6}$, после чего подстановка в первое уравнение дает

$$B = \pm(2A/3)^{3/2}. \quad (3.24)$$

Это и есть уравнение линии складок, знаки плюс и минус соответствуют ее двум ветвям. Точка сборки находится в данном случае в начале координат.

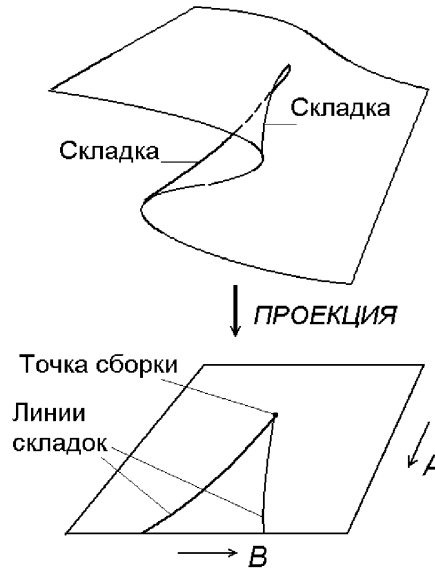


Рис. 3.16. Трехмерный график поверхности $x = f(A, B)$ и возникновение складок и сборки при проецировании.

Рис. 3.17 и 3.18 иллюстрируют как изменяется состояние системы «шарик в лунке» при медленном изменении формы потенциального рельефа, соответствующем движению по плоскости параметров с обходом точки сборки в одну или в другую сторону. При этом скачкообразное изменение состояния, о котором говорят как о *жесткой бифуркации* или *катастрофе*, происходит при пересечении одной линии складок при движении слева направо и другой при движении справа налево. Ситуацию удобно представлять как движение по поверхности, состоящей из частично перекрывающихся листов (область бистабильности). Скачок происходит в момент пересечения границы листа.

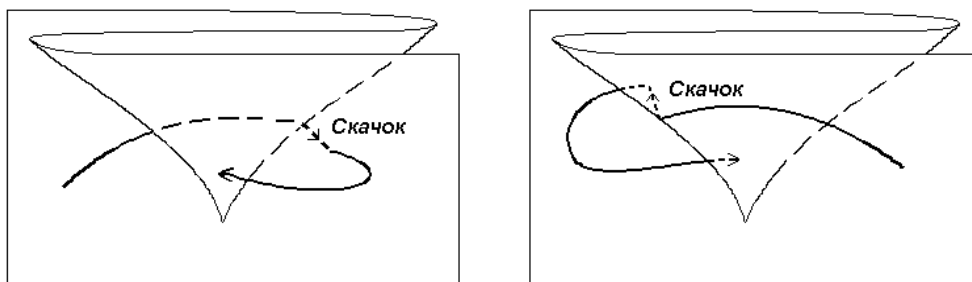


Рис. 3.17. К пояснению явлений, наблюдаемых при обходе точки сборки в разных направлениях.

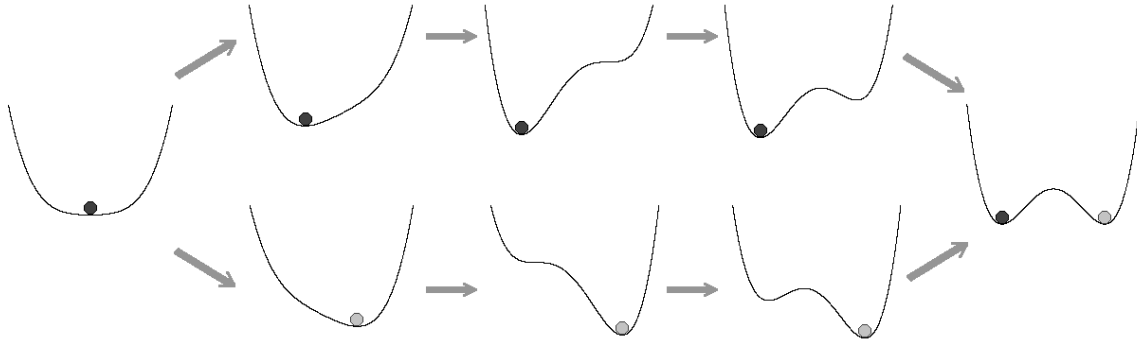


Рис.3.18. Изменение потенциального рельефа, соответствующее двум траекториям движения по плоскости параметров, приводящим к реализации двух различных состояний устойчивого равновесия.

В зависимости от того, как выбран путь на плоскости параметров при адиабатически медленном их изменении, мы можем прийти в одну и ту же точку области бистабильности, имея результатом разные состояния равновесия (рис. 3.18).

Задача 3.10. На рис. 3.19 показана система, представляющая собой маятник в верхнем положении равновесия, прикрепленный к пружине. Покажите, что если пружина линейна и ее коэффициент жесткости k невелик, то положение равновесия неустойчиво. Покажите, что если пружина нелинейная, то в системе возможна бистабильность — реализуются два положения устойчивого равновесия. Считайте, что нелинейность пружины описывается соотношением $F = kx + cx^3$, где k и c — положительные коэффициенты, а угол отклонения маятника от вертикали мал. Длина стержня l , масса шарика m . (Указание. Получите в явном виде зависимость потенциальной энергии маятника от координаты x .)

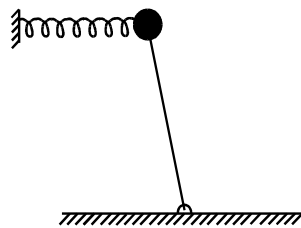


Рис.3.19

Задача 3.11. В системе, описанной в предыдущей задаче, точка прикрепления пружины C может перемещаться вдоль горизонтали влево — вправо. Изобразите график зависимости деформации пружины x , отвечающей положениям равновесия, от величины смещения точки прикрепления пружины x_0 . Опишите трансформации графика зависимости потенциальной энергии $U(x)$ при вариации x_0 . Обсудите возможность гистерезиса в системе.

Задача 3.12. Шарик массы m может без трения скользить по стержню, наклоненному под углом α к горизонту. Шарик прикреплен к пружине жесткости k , второй конец которой неподвижно зафиксирован на расстоянии a от стержня в точке, принадлежащей проходящей через стержень вертикальной плоскости (рис.3.20). Длина пружины в нерастянутом состоянии l . Как трансформируется при изменении парамет-

ров вид зависимости потенциальной энергии от координаты шарика x , отсчитываемой вдоль стержня? Найдите линии складок и точку сборки на плоскости параметров $\alpha, l/a$.

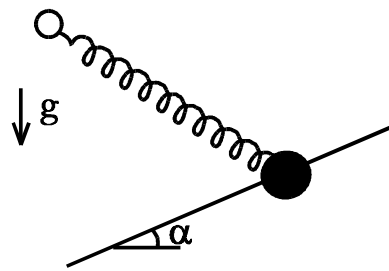


Рис. 3.20

Задача 3.13. Маленькая бусинка массы m может без трения скользить по тонкому проволочному кольцу радиуса R (рис.3.21). Кольцо вращают с частотой ω вокруг вертикальной оси, проходящей через плоскость кольца на расстоянии a от его центра. Проследите за трансформацией зависимости потенциальной энергии бусинки от ее координаты во вращающейся системе отсчета. Найдите линии складок и точку сборки на плоскости параметров $a, \omega^2 R/g$.

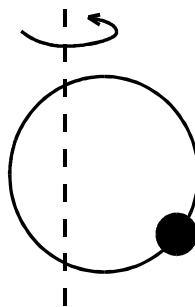


Рис. 3.21

Задача 3.14. Параметры системы, демонстрирующей катастрофу сборки, медленно изменяют так, что точка на плоскости параметров обходит сборку 5 раз (рис. 3.22 а). Сколько жестких переходов происходит в системе? Для маршрутов на рис. 3.22 б,в изобразите качественно зависимость состояния системы от параметра, отсчитываемого вдоль этих маршрутов.

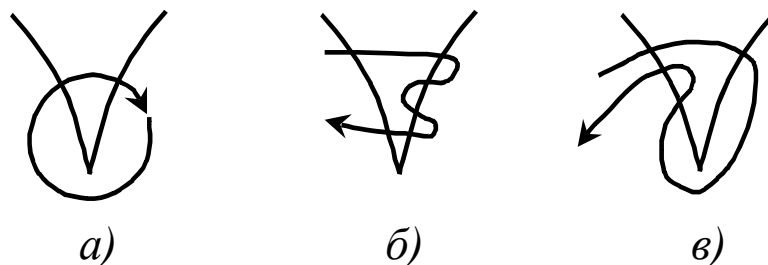


Рис. 3.22

Задача 3.15. На рис. 2.8а показана вольт-амперная характеристика полупроводникового радиотехнического элемента — туннельного диода. Такой диод включен в цепь, содержащую регулируемую ЭДС E с внутренним сопротивлением R . Графически решив уравнение, соответствующее закону Ома, покажите,

что существуют такие значения E и R , при которых в системе реализуется бистабильность. Рассмотрите эту же задачу аналитически, используя кубическую аппроксимацию вольт-амперной характеристики $I = a(U - U_0)^3 - b(U - U_0) + c$, где a , b и c — коэффициенты. Покажите, что при вариации ЭДС бистабильность возможна лишь при выполнении условия $bR > 1$. Найдите координаты точки сборки и линии складок на плоскости R, E и изобразите взаимное расположение вольт-амперной характеристики диода и нагрузочной прямой в различных точках в окрестности точки сборки и непосредственно в ней.

Задача 3.16. Резонатор Фабри — Перо, представляющий собой два плоскопараллельных полупрозрачных зеркала, заполнен средой с нелинейным показателем преломления (рис. 3.23). Свойства нелинейности таковы, что полный набег фазы волны между зеркалами зависит от интенсивности света по формуле $\varphi = \varphi_0 + \alpha I$, где φ_0 и α — константы, I — интенсивность выходящего излучения. Используя известное в оптике соотношение

$$I = \frac{\alpha I_0}{1 + b \sin^2(\varphi/2)},$$

где I_0 — интенсивность на входе в интерферометр, a и b — константы, покажите, что в системе существует мультистабильность. Для этого постройте график зависимости интенсивности света на выходе I от интенсивности на входе I_0 . Покажите на полученном графике петли гистерезиса.

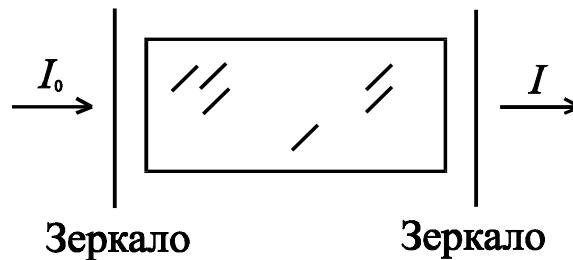


Рис.3.23

Динамический хаос

Мы уже подчеркивали главную особенность нелинейных систем, связанную с тем, что колебания разной амплитуды происходят в них по-разному. В более общем виде это свойство можно сформулировать так, что *несовпадающие фазовые траектории отвечают разной по характеру динамике*: они посещают разные области фазового пространства, а нелинейность заключается в том, что в разных областях поток траекторий устроен по-разному.

В нелинейных системах с числом динамических переменных более трех в определенных случаях может встречаться такой тип динамического поведения, когда любые

два движения, характеризуемые близкими начальными условиями, постепенно уходят друг от друга так, что через определенное время они становятся существенно различными. Если этим свойством обладают все фазовые траектории, доступные в данном режиме функционирования системы, то она демонстрирует *динамический хаос*. Это режим, характеризующийся нерегулярным, похожим на случайный процесс, изменением динамических переменных во времени, и при том обусловленный собственной сложной динамикой системы, а не каким-либо внешним шумовым воздействием на нее. В диссипативных системах хаос ассоциируется с наличием в фазовом пространстве *странных аттракторов* – сложно устроенных фрактальных множеств, притягивающих к себе все траектории из некоторой прилегающей области – бассейна аттрактора.

Один из примеров хаотической динамики возникает в задаче о конвекции жидкости в кольцевой трубке (рис. 3.24). Трубка подогревается снизу и охлаждается сверху. Поскольку нагретая жидкость легче холодной, она будет стремиться подняться вверх, а холодная – опуститься вниз. Поэтому при достаточно большой интенсивности подогрева возможно возникновение конвекционного течения.

Можно показать, что при определенных разумных предположениях динамика такой системы может быть описана с введением трех динамических переменных знаменитой *системой уравнений Лоренца*

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -bz + xy. \quad (3.25)$$

Здесь переменная x пропорциональна скорости течения жидкости, y и z — отклонению температуры от среднего значения, соответственно, в правом колене и в нижней части трубки. Параметр b определяется геометрией задачи, и равен 1 для трубки в форме правильной окружности. Параметр σ определяется отношением коэффициентов вязкости и теплопроводности, параметр r характеризует степень подогрева.

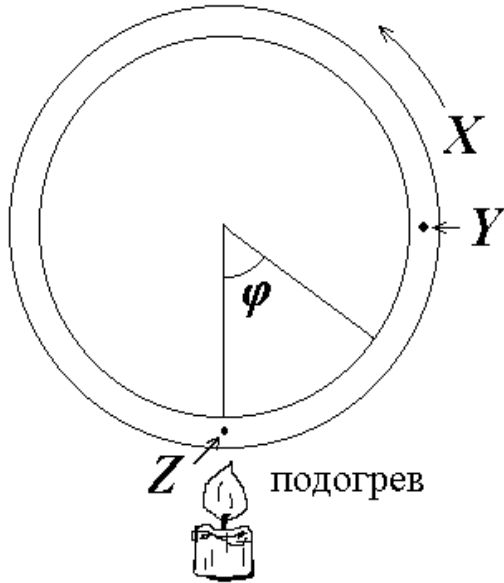


Рис. 3.24. Задача о конвекции в замкнутой кольцевой трубке. X характеризует скорость течения, Y и Z — отклонение температуры от среднего значения в указанных точках.

В своей классической работе 1963 г. Эдвард Лоренц провел численное решение уравнений (3.27) на компьютере при значениях параметров $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$. На рис. 3.25 воспроизводится полученная при этом зависимость динамических переменных от времени. Можно видеть, что не наблюдается тенденции к установлению какого-либо простого стационарного или периодического режима. В то же время, наблюдаемый режим динамики оказывается можно рассматривать как установившийся в некотором статистическом смысле: усредненные за достаточно большой период времени величины, например, $\langle x^2 \rangle$, $\langle y^2 \rangle$, $\langle z^2 \rangle$, практически стационарны. Объект в фазовом пространстве, которому принадлежат траектории в установившемся режиме динамического хаоса — *странный аттрактор*, показан на рис. 3.26.

Хаос оказался очень распространенным феноменом, характерным для многих нелинейных систем. Его открытие стало одним из самых замечательных событий в науке XX века. Изучение хаоса, его закономерностей, путей возникновения, возможных приложений в различных областях знания привлекает внимание множества исследователей — теоретиков и экспериментаторов. Это одно из самых интересных и быстро развивающихся направлений в современной теории колебаний и нелинейной динамике.

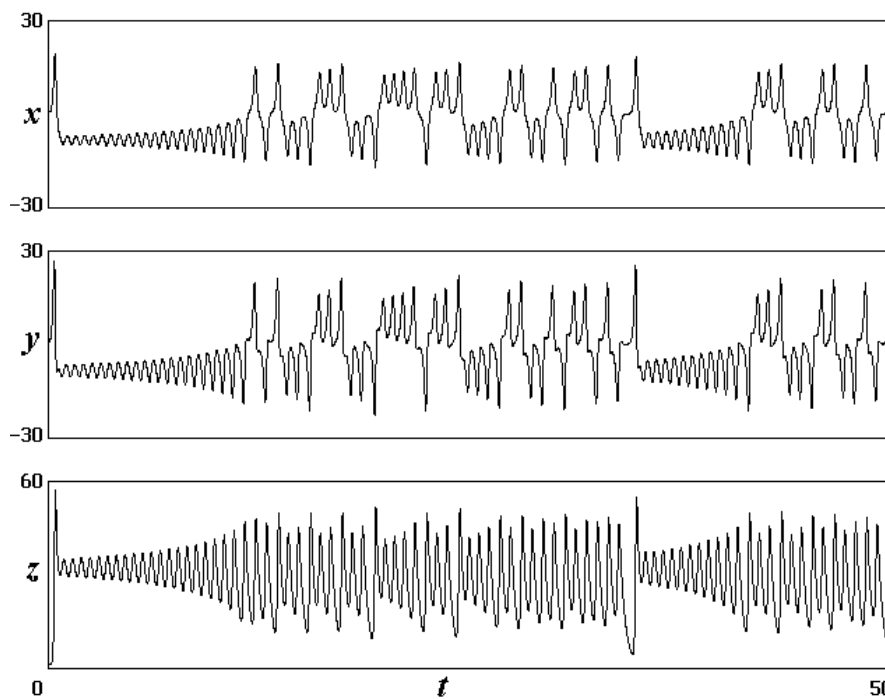


Рис. 3.25. Зависимости динамических переменных x , y , z от времени, полученные численным интегрированием уравнений Лоренца при $\sigma=10$, $b=8/3$, $r=28$.

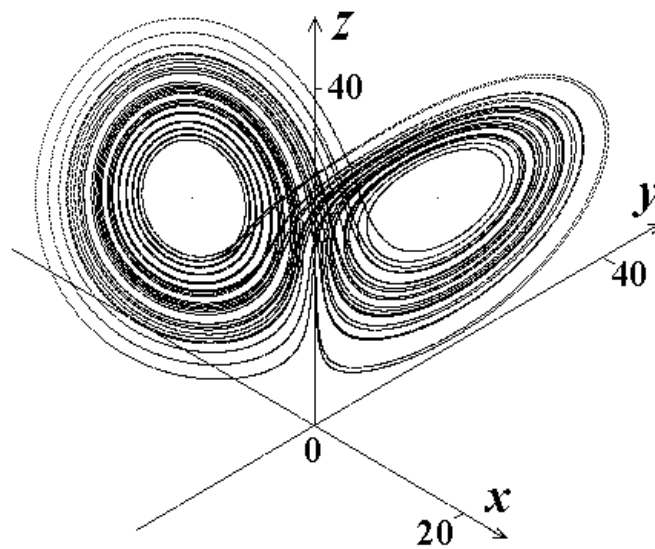


Рис. 3.26. Странный аттрактор системы Лоренца для «классического» набора параметров: $\sigma=10$, $b=8/3$, $r=28$.