

## Лекция 2

### Нелинейные элементы и нелинейные характеристики

Прежде чем переходить непосредственно к рассмотрению колебаний и колебательных систем, полезно сделать следующее существенное замечание. Для понимания поведения сложных объектов, как и для создания сложных систем с заданными свойствами, очень часто имеет смысл представлять объект как совокупность составных частей, элементов, каждый из которых может быть охарактеризован совокупностью тех и только тех его свойств, которые существенны для функционирования системы в целом.

Возьмем, например, радиоприемник или телевизор, представляющий собой довольно сложную систему из соединенных определенным образом элементов – транзисторов, конденсаторов, резисторов и др. Разглядывая принципиальную схему (или разрабатывая ее), мы не вспоминаем о явлениях, происходящих внутри каждого транзистора, диода или иного элемента. То, что для нас в данный момент имеет значение, это не внутреннее устройство элементов, а их “внешние” свойства и характеристики, существенные для функционирования схемы. Скажем, мы обязательно должны иметь представление о том, как связаны входные и выходные напряжения и токи, но можем забыть о физических процессах, ответственных за возникновение именно такой связи. Это и есть тот уровень рассмотрения, на котором оказывается возможным и целесообразным представлять себе работу устройства в целом.

Обсудим свойства и характеристики элементов, из которых строятся колебательные системы в механике, а также в электро- и радиотехнике. Начнем с линейных элементов.

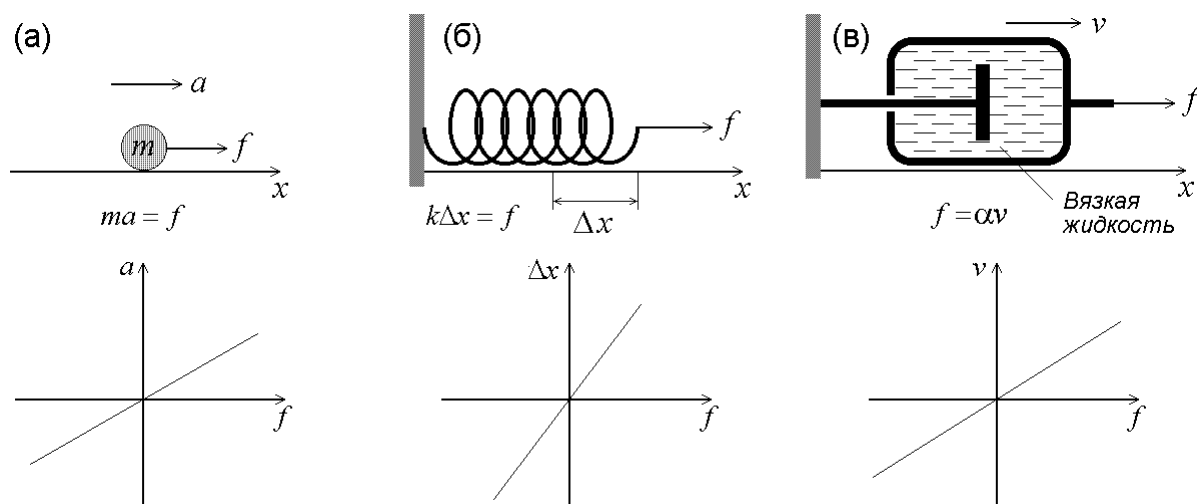


Рис.2.1. Механические линейные элементы и их характеристики: (а) масса, (б) линейная пружина, (в) элемент вязкого трения.

Линейные элементы механических систем представлены на рис. 2.1. Если мы имеем материальную частицу массы  $m$ , которая может свободно двигаться по оси  $x$

(рис. 2.1а), то по закону Ньютона  $f = ma$  ускорение  $a = dv/dt$  пропорционально действующей на частицу силе  $f$ . Величину  $f$  можно трактовать как воздействие, а величину  $dv/dt$  — как отклик. Зависимость отклика от воздействия линейная и определяется единственным параметром — коэффициентом пропорциональности  $m$ . Рассмотрим, далее, упругий элемент — пружину, изменение длины которой прямо пропорционально приложенной силе (рис. 2.1б). Величину силы интерпретируем как воздействие, а удлинение — как отклик. Зависимость отклика от воздействия линейная и определяется коэффициентом жесткости пружины  $k$ . Наконец, элемент вязкого трения, показанный на рис. 2.1в, характеризуется линейной зависимостью скорости  $v$  от приложенной силы  $f$ :  $f = \alpha v$ , где константа  $\alpha$  есть коэффициент трения.

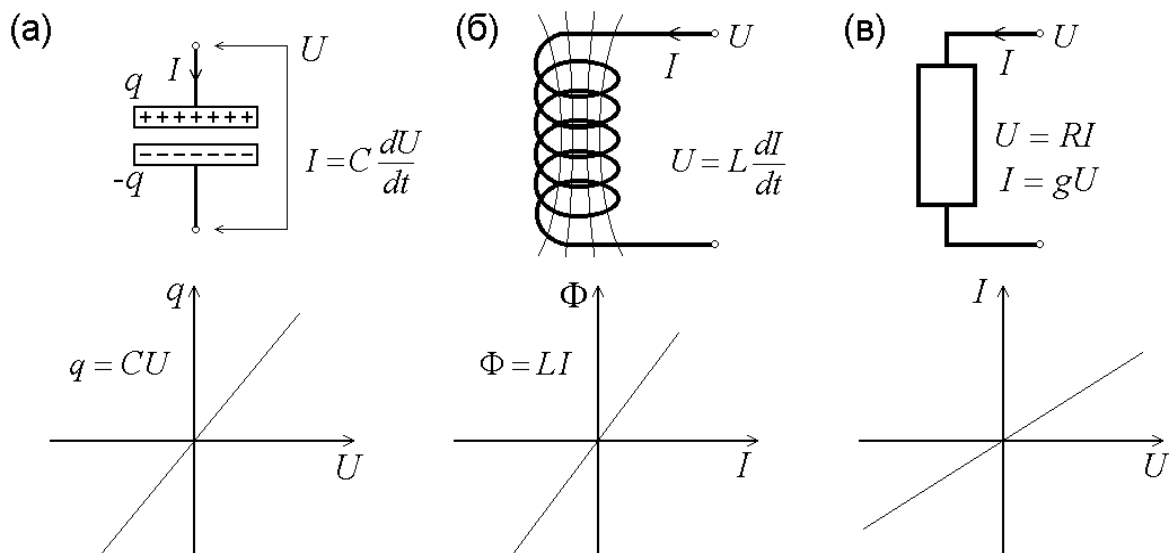


Рис.2.2. Электрические линейные элементы и их характеристики: (а) емкость,  $q$  – заряд на обкладках конденсатора, (б) индуктивность,  $\Phi$  – суммарный магнитный поток через витки обмотки (в) сопротивление (проводимость).

Линейные элементы электро- и радиотехнических схем показаны на рис. 2.2. Конденсатор, представляет собой две металлические пластины (обкладки), разделенные диэлектрическим промежутком (рис. 2.2а) и характеризуется линейной зависимостью заряда на пластинах  $q$  от приложенного напряжения  $U$ ,  $q = CU$ . Ток  $I$  есть производная по времени от накопленного заряда, так что можно написать  $I = C dU/dt$ . Коэффициент  $C$ , как известно, называется емкостью. Катушка индуктивности (рис. 2.2б) характеризуется линейной зависимостью между производной от протекающего тока  $dI/dt$  и величиной приложенного напряжения  $U$ . Коэффициент пропорциональности есть индуктивность  $L$ :  $L dU/dt = I$ . Наконец, диссипативный элемент — резистор ха-

характеризуется линейной зависимостью протекающего через него тока  $I$  от напряжения  $U$ . При этом полагают  $U = RI$  или  $I = gU$ , где  $R$  называется сопротивлением, а обратная величина  $g = 1/R$  — проводимостью.

В определении того, какая из величин рассматривается как воздействие, а какая — как отклик, есть момент соглашения: при наличии простой функциональной связи между ними мы вправе выбрать эту трактовку из соображений удобства. Например, при включении резистора параллельно прочим элементам цепи предпочтительно интерпретировать напряжение как воздействие, а ток как отклик, а при последовательном — наоборот. Более того, иногда оказывается целесообразным принять одно соглашение о том, какую величину считать воздействием, а какую откликом, при проведении измерений параметров или характеристик, и другое при рассмотрении функционирования элемента в схеме.

Таблица 1

**Аналогия между механическими и электрическими величинами и элементами**

Механика	Электричество
Смещение $x$	Заряд $q$
Скорость $v = dx/dt$	Ток $I = dq/dt$
Сила $f$	Напряжение $U$
Импульс $p$ , $f = dp/dt$	Магнитный поток $\Phi$ , $U = d\Phi/dt$
Масса $m$	Индуктивность $L$
Коэффициент жесткости пружины $k$	Обратная емкость конденсатора $C^{-1}$
Коэффициент вязкого трения $\alpha$	Сопротивление $R$
Закон Ньютона $m dv/dt = f$	$L dI/dt = U$
Закон Гука $f = kx$	$U = q/C$
Закон Стокса $f = \alpha v$	Закон Ома $U = RI$

Отметим замечательную параллель между элементами, величинами и параметрами в механике и электричестве. Если сопоставить механическое смещение  $x$  электрическому заряду  $q$ , то все прочие механические величины, фигурировавшие в наших рассужде-

ниях, естественным образом находят свои аналоги среди электрических величин, а все связывающие их соотношения остаются в силе. Эта аналогия резюмируется в табл.1 и может рассматриваться как основа “колебательной общности” по Мандельштаму между механикой и электричеством.

Каждому из рассмотренных выше механических и электрических элементов соответствует линейная и притом мгновенная, безынерционная связь величин, представляющих воздействие и отклик. Простейшее обобщение состоит в том, чтобы считать связь между воздействием и откликом нелинейной, хотя по-прежнему мгновенной. Так мы приходим к представлению о безынерционных нелинейных элементах.

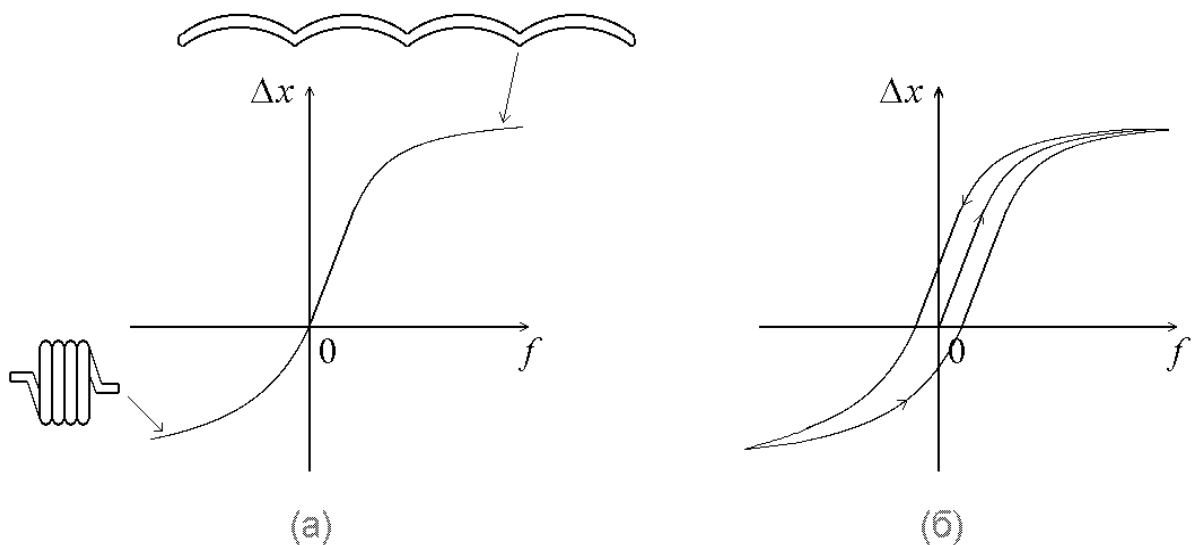


Рис.2.3. Примерный вид зависимости удлинения от силы для нелинейной пружины: а) в случае идеально упругого материала, б) при наличии остаточных деформаций и гистерезиса.

В качестве первого объекта, возьмем пружину и представим себе, как реально происходит ее растяжение. Нетрудно сообразить, что при достаточно большом растяжении линейная связь между силой и удлинением заведомо нарушится. В самом деле, если приложенная сила очень велика, то проволока, из которой свита пружина, вытянется почти в прямую линию (рис. 2.3а). В этой ситуации мы будем иметь дело уже не с витками, работающими на изгиб, а по существу с куском проволоки, работающим на растяжение. Поэтому значительное увеличение силы будет сопровождаться непропорционально малым ростом удлинения. С другой стороны, сжимая пружину, мы достигаем в конце концов такой ситуации, когда витки прижаты друг к другу, и дальнейшее сжатие может быть обеспечено только за счет деформации проволоки в ее поперечном сечении. При этом опять-таки значительное увеличение силы будет сопровождаться очень

малым изменением деформации. Подытоживая этот качественный анализ, заключаем, что график зависимости силы от удлинения должен иметь примерно такой вид, как на рис. 2.3. Хотя в области малых сил и малого удлинения пружины вблизи начала координат кривая может быть аппроксимирована касательной и охарактеризована коэффициентом упругости  $k$ , всю нелинейную зависимость в целом невозможно задать одним параметром. Она представляется функцией, которую можно назвать *нелинейной характеристикой* нашей пружины. Если ограничиться малым интервалом изменения силы и удлинения, в пределах которого характеристику можно считать приблизительно линейной, то можно ввести отвечающий этому интервалу дифференциальный коэффициент жесткости, как отношение изменения силы к изменению удлинения. Математически, это не что иное, как производная  $k_{диф} = df/dx$ .

Все наши рассуждения состоятельны, если материал, из которого изготовлена пружина, считать идеально упругим. В противном случае, из-за присутствия так называемых остаточных деформаций, конфигурация пружины будет зависеть от того, какой была и как изменялась нагрузка в предшествующие моменты времени. Если мы сначала увеличиваем нагрузку, стартовав из начала координат (рис. 2.3б), а затем уменьшаем ее до нуля, то пружина сохранит некоторое остаточное удлинение ( $\Delta x > 0$ ). Если далее мы сжимаем пружину, а затем уменьшаем действующую силу, то при нулевой нагрузке пружина окажется короче, чем в исходном состоянии ( $\Delta x < 0$ ). Таким образом, описание с помощью однозначно определенной нелинейной характеристики становится неадекватным. Имеет место, как говорят, *гистерезис* – зависимость между воздействием и откликом оказывается зависящей от предыстории. Замкнутую кривую на рис. 2.3б называют *петлей гистерезиса*.

Нелинейность в механической системе может вноситься также благодаря трению. Мы упоминали выше элемент вязкого трения. Известно, что при обтекании тел жидкостью прямая пропорциональность между скоростью и силой имеет место только при малых скоростях (закон Стокса). При больших скоростях он модифицируется, и в определенном диапазоне скоростей сила оказывается приблизительно пропорциональна квадрату скорости, так что можно записать  $f \cong \alpha v + \gamma v^2$ .

Следует иметь в виду, что для достаточно больших скоростей течение становится очень сложным, нестационарным и, в конце концов, турбулентным. Представление о том, что имеет место однозначная, не зависящая от предыстории, связь между силой и скоростью, оказывается не более чем приближением. Его справедливость зависит от того, какой диапазон скоростей и характерных времен существенен с точки зрения функционирования нашего нелинейного элемента, как составной части рассматриваемой системы.

Кроме вязкого трения, в механических системах встречается *сухое трение*, например, при скольжении твердых тел одного по другому (рис. 2.4). В определенном приближении (закон Кулона — Амонтона) силу сухого трения считают постоянной по величине и противоположной по направлению скорости относительного движения тел. Таким образом, связь между воздействием (приложенной силой) и откликом (скоростью), т.е. нелинейная характеристика для элемента сухого трения, выражается соотношением  $f = \alpha \operatorname{sgn} v = \alpha v/|v|$ . Иногда возникает необходимость учесть зависимость силы трения от скорости. При этом обычно полагают, что с ростом скорости трение скольжения несколько уменьшается (пунктир на рис. 2.4). Вообще физика, стоящая за явлением сухого трения, необычайно сложна и до конца до сих пор не вскрыта.

Частица, ускоряющаяся под действием приложенной силы, выступает как элемент нелинейный, если принять во внимание установленную в теории относительности релятивистскую зависимость массы от скорости:  $m = m_0 v / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Здесь  $m_0$  — постоянная, называемая массой покоя частицы, а  $c$  — скорость света. Нелинейную характеристику такого элемента удобно представлять функцией, определяющей зависимость импульса от скорости,  $p = f(v) = m_0 v / \sqrt{1 - v^2/c^2}$  (рис. 2.5).

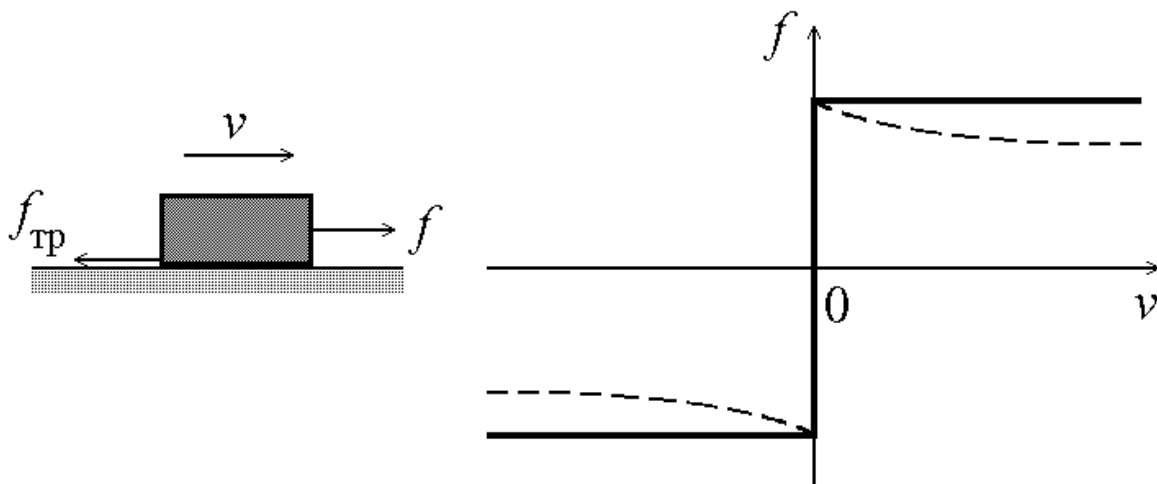


Рис.2.4. Нелинейная характеристика элемента сухого трения: сплошная линия – по закону Кулона–Амонтона. Вертикальный участок отвечает ситуации трения покоя (движения нет, а величина силы может быть любой в интервале от  $-|f_{\max}(0)|$  до  $|f_{\max}(0)|$  в зависимости от приложенного воздействия). Пунктир – вид характеристики, принимаемой когда приходится учитывать зависимость силы трения от скорости.

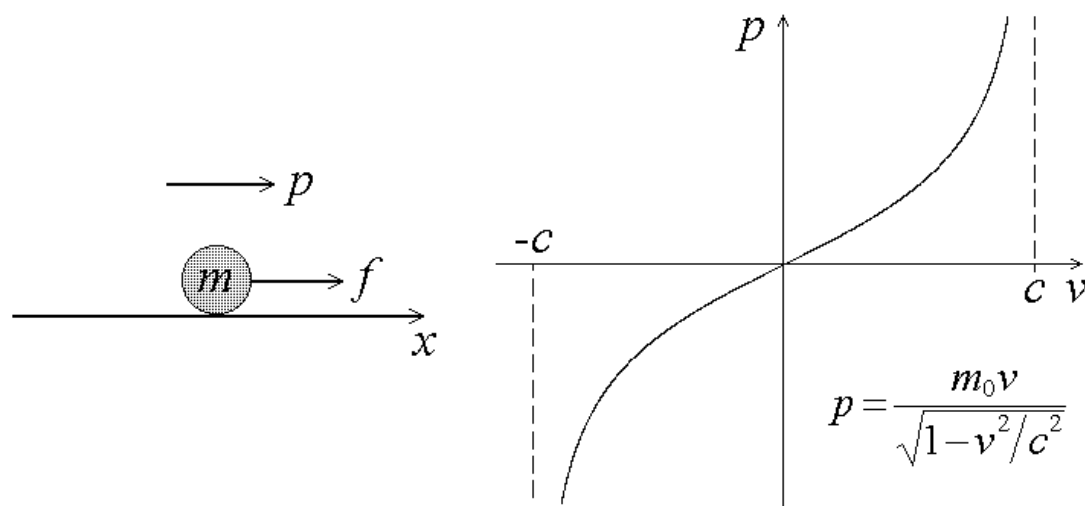


Рис.2.5. Нелинейная характеристика релятивистской частицы – зависимость импульса от скорости.

Несмотря на кажущуюся экзотичность последнего примера, он реален и даже используется на практике. В электронике сверхвысоких частот существует класс устройств – гирорезонансные приборы или мазеры на циклотронном резонансе. Их принцип работы существенно опирается на то обстоятельство, что электрон, движущийся по круговой орбите в сильном магнитном поле, представляет собой нелинейный осциллятор. При этом нелинейность обусловлена как раз релятивистской зависимостью массы от скорости.

Перейдем к обсуждению нелинейных электрических элементов.

Пусть мы имеем конденсатор, в котором в качестве диэлектрической прокладки использовано вещество с нелинейной зависимостью поляризации от приложенного электрического поля. Это может быть материал, относящийся к так называемым сегнетоэлектрикам (первоначально изученный представитель – сегнетова соль, которая и дала имя всему классу веществ). В малом электрическом поле поляризуемость сегнетоэлектрика очень велика, так что в конденсаторе в поверхностном слое сегнетоэлектрика появляется заряд противоположный по знаку заряду пластины (рис. 2.6а). В результате электрическое поле, а значит и разность потенциалов между обкладками, оказывается существенно меньшей, чем в “пустом” конденсаторе, а емкость, соответственно, большей. Когда электрическое поле велико, поляризация испытывает насыщение, и компенсирующее действие поляризационных зарядов уменьшается. В результате зависимость величины заряда на пластинах конденсатора от разности потенциалов должна иметь вид подобный рис. 2.6б. Можно ввести дифференциальную емкость, как производную  $C_{диф} = dq/dU$ . Для рассматриваемого элемента дифференциальная емкость будет убывать с увеличением заряда или напряжения.

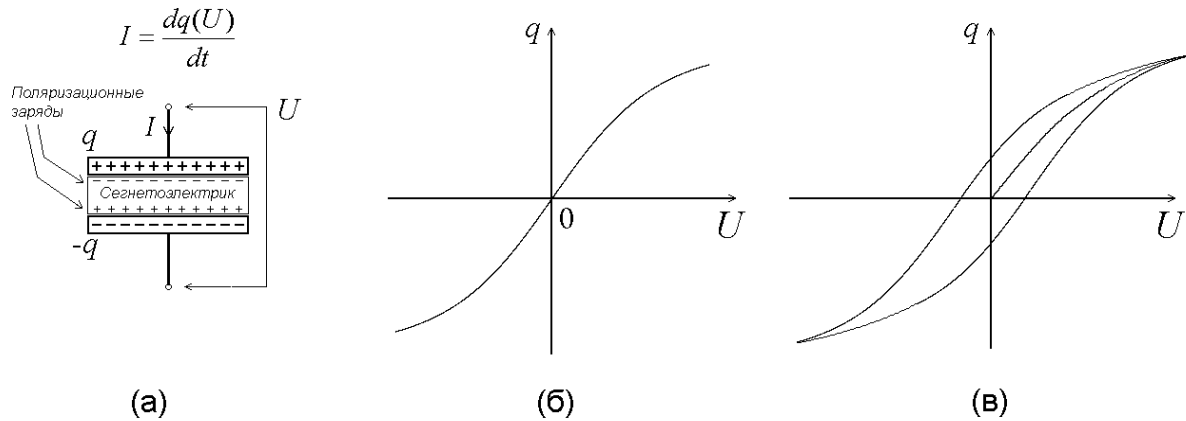


Рис.2.6. Конденсатор с сегнетоэлектриком (а) и его нелинейная характеристика без учета (б) и с учетом (в) гистерезиса.

На практике, в сегнетоэлектриках наблюдается эффект остаточной поляризации. На графике зависимости заряда от разности потенциалов это выражается в появлении петли гистерезиса, подобной той, какую мы описали при обсуждении неидеальной пружины (рис. 2.6в). Таким образом, связь между откликом и воздействием, вообще говоря, оказывается зависящей от предыстории. Только в определенном приближении, когда остаточная поляризация мала, и гистерезисом можно пренебречь, допустимо рассматривать конденсатор с сегнетоэлектриком как безынерционный элемент с однозначно определенной нелинейной характеристикой типа показанной на рис. 2.6б.

Рассмотрим теперь катушку индуктивности с ферромагнитным сердечником (рис. 2.7а). При малом токе в обмотке напряженность магнитного поля невелика, ферромагнетик приобретает большую намагниченность, а магнитный поток через витки катушки быстро растет с увеличением тока. При большом токе намагниченность испытывает насыщение, и этот рост замедляется. Зависимость величины магнитного потока от тока, которую можно рассматривать как нелинейную характеристику данного элемента, будет выглядеть, как показано на рис. 2.7б.

Фактически характеристика, приведенная на рис. 2.7б, реализуется в хорошем приближении в случае так называемых мягких ферромагнетиков (к ним относится трансформаторное железо, используемое как материал для изготовления сердечников трансформаторов). Вообще говоря, для ферромагнетиков характерно явление остаточной намагниченности. На графике зависимости магнитного потока от тока в обмотке оно выражается в появлении петли гистерезиса (рис. 2.7в). Если этот эффект сильно выражен, ферромагнетик называют жестким; такие материалы используют для постоянных магнитов.



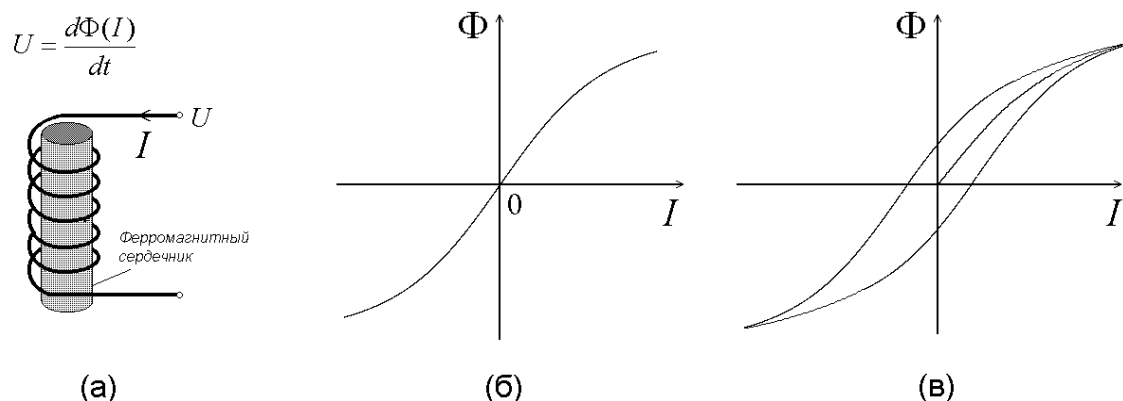


Рис.2.7. Катушка индуктивности с ферромагнитным сердечником (а) и ее нелинейная характеристика без учета (б) и с учетом (в) гистерезиса.

Еще один пример нелинейного элемента — знакомая всем нам лампа накаливания. В самом деле, сопротивление нити зависит от температуры: чем выше температура, тем больше сопротивление. Если увеличивать приложенное напряжение, то при этом будет расти сопротивление, поэтому изменение тока будет отклоняться от линейного закона. Поскольку за формирование вида нелинейной характеристики в данном случае отвечают тепловые эффекты, данный нелинейный элемент характеризуется существенными инерционными свойствами. Если представить себе, что мгновенно изменилось приложенное напряжение, то величина сопротивления заметно изменится только через некоторое характерное время (время релаксации), необходимое чтобы установился новый тепловой режим устройства, в котором был бы обеспечен баланс между мощностью от внешнего источника, и мощностью, излучаемой и рассеиваемой в окружающую среду.

Особую роль в электро- и радиотехнике играют нелинейные элементы, у которых зависимость тока от напряжения или напряжения от тока имеет падающий участок, т.е. участок, где дифференциальное сопротивление — производная от напряжения по току (или дифференциальная проводимость — производная от тока по напряжению) отрицательна. Если такой элемент включен в колебательный контур, и при этом присутствие внешнего источника постоянного напряжения обеспечивает расположение рабочей точки на падающем участке характеристики, то колебания тока и напряжения в контуре около этой точки могут стать нарастающими. При достаточно большой амплитуде, сравнимой по величине с протяженностью падающего участка, наступит стабилизация амплитуды колебаний. Устройство будет функционировать как автоколебательная система, генератор незатухающих колебаний.

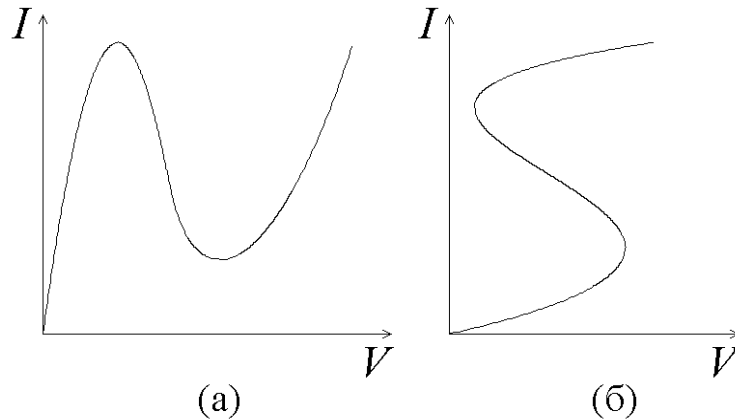


Рис.2.8. Вольтамперные характеристики с отрицательным дифференциальным сопротивлением  $N$ -типа (а) и  $S$ -типа (б).

На рис. 2.8 приведены две типичные формы характеристик с падающим участком на графике, где по оси абсцисс отложено напряжение, а по оси ординат ток. В одном случае кривая напоминает латинскую букву  $N$ , и ее называют характеристикой  $N$ -типа. В другом случае она похожа на букву  $S$ , и ее называют характеристикой  $S$ -типа. Примером элемента с характеристикой  $N$ -типа служит туннельный диод, примером элемента с характеристикой  $S$ -типа — промежуток между двумя электродами, в котором происходит дуговой разряд.

В случае дугового разряда наличие падающего участка вольт-амперной характеристики обусловлено тем, что увеличение тока в канале разряда соответствует росту степени ионизации и, соответственно, концентрации свободных носителей заряда. Поэтому для поддержания большего тока оказывается достаточным прикладывать меньшее напряжение.

Механизм, ответственный за возникновение падающего участка характеристики туннельного диода объясняется на основании развитой в теории твердого тела зонной теории проводимости и с учетом возможности квантового туннелирования носителей заряда через потенциальный барьер. На рис. 2.9 показана схематически структура зон в области контакта полупроводника  $p$ -типа (слева) и  $n$ -типа (справа): по оси абсцисс отложена пространственная координата, а по вертикальной — энергия. Белый цвет соответствует запрещенной зоне, а серый — разрешенным зонам. Темно-серым цветом обозначены состояния, занятые электронами, а светло-серым — не занятые. Диаграмма (а) отвечает нулевому приложенному напряжению. Увеличение напряжения соответствует тому, что расположение зон слева и справа от области перехода смещается друг относительно друга, как показано на рисунках (б)–(г). Ситуация (б) отвечает наиболее благоприятным условиям для туннелирования электронов, которые переходят из заполненных состояний вблизи дна верхней разрешенной зоны справа налево через потенциальный барьер, образованный белой запрещенной областью. При дальнейшем увеличении напряжения напротив этих состояний слева оказывается запрещенная зона, так что ток должен быть мал (в). Наконец, при еще

больших величинах приложенного напряжения ток снова растет, причем основной вклад вносится так называемым диффузионным током ( $\gamma$ ).

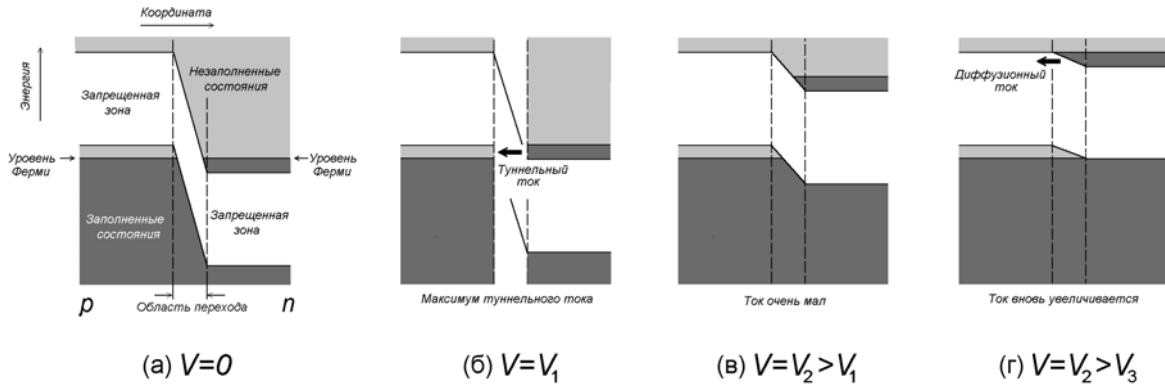


Рис. 2.9. К механизму образования падающего участка вольт–амперной характеристики туннельного диода. По оси абсцисс отложена пространственная координата, а по вертикальной – энергия. Слева от переходной области располагается полупроводник  $p$ -типа, а справа –  $n$ -типа. Белый цвет – запрещенная зона, а серый – разрешенные зоны. Уровень Ферми отделяет состояния, занятые электронами (обозначены темно-серым) от не заполненных (обозначены светло-серым). Диаграммы (а)–(г) отвечают увеличению приложенного напряжения, начиная от нуля.

Когда мы представляем колебательную систему как совокупность элементов, очень часто встречается такая ситуация, что существенной для колебательной динамики оказывается нелинейность какого-либо одного из элементов, тогда как остальные можно считать линейными. Зная из теоретических расчетов, из измерений, наконец, из справочника вид характеристики нелинейного элемента (например, в виде графика, таблицы, формулы) мы можем сформулировать уравнения, описывающие колебания в системе, и обратиться к их исследованию.

**Задача 2.1.** Небольшой грузик массы  $m$  прикреплен к концу легкой пружины, вращающейся в невесомости вокруг другого ее конца с угловой скоростью  $\omega$ , и совершает малые радиальные колебания около положения равновесия (рис. 2.10). Длина недеформированной пружины  $l_0$ . Покажите, что в рамках модели линейной пружины с коэффициентом жесткости  $k$  такое поведение системы можно описать лишь при не очень больших значениях частоты вращения. Найдите критическую частоту  $\omega_c$ , при которой линейная модель полностью теряет смысл. Покажите, что учет нелинейности пружины позволяет дать описание поведения системы и при  $\omega \geq \omega_c$ . Считайте, что зависимость упругой силы от деформации имеет вид  $F = kx + cx^3$ , где  $k$  и  $c$  — положительные коэффициенты. (Указание. Определите положение равновесия системы графическим методом.)

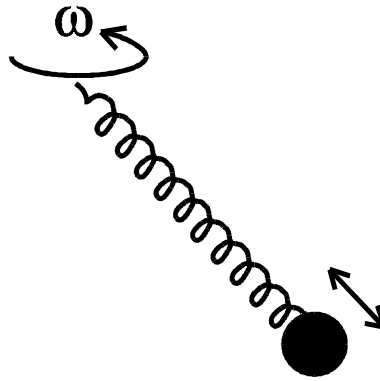


Рис. 2.10

**Задача 2.2.** Для описания динамики популяции в 1838 году Ферхюльст предложил следующую модель:

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2.$$

Здесь  $N$  — численность популяции,  $a$  и  $b$  — положительные коэффициенты. Найдите решение этого уравнения и постройте график зависимости  $N(t)$ . Начальное число особей равно  $N_0$ . Покажите, что если начальное число особей невелико, то можно выделить “линейную” стадию процесса, на которой исходное дифференциальное уравнение заменяется соответствующим линейным. По какому закону изменяется число особей  $N$  на линейной стадии? Через какое характерное время начнут сказываться нелинейные эффекты? К чему приведет воздействие нелинейности по истечении достаточно большого времени? Используя полученные результаты, дайте интерпретацию коэффициентам  $a$  и  $b$ .

**Задача 2.3.** Конденсатор с нелинейной характеристикой  $q = CU + aU^2$  замкнут на резистор с сопротивлением  $R$ . Получите зависимость напряжения на конденсаторе от времени, если его начальное значение равно  $U_0$ . Оцените характерное время  $\tau$ , в течение которого существенны нелинейные эффекты. Найдите закон изменения напряжения на линейной стадии процесса разряда конденсатора.

**Задача 2.4.** Получите дифференциальное уравнение, описывающее процессы в колебательном контуре, образованном емкостью  $C$  и катушкой с нелинейной индуктивностью. Магнитный поток  $\Phi$ , пронизывающий катушку, связан с током  $I$  соотношением  $\Phi = LI + kI^3$ .

**Задача 2.5.** Проявляет ли парамагнетик нелинейные свойства во внешнем магнитном поле? Если да, то какова природа нелинейности?

**Задача 2.6.** В соленоид с поперечным сечением  $S$  и индуктивностью  $L$  вставляют ферромагнитный сердечник. Получите выражение для потока, пронизывающего соленоид, в приближении слабой нелинейности в виде ряда, содержащего линейный и кубичный по току члены. Считайте, что ферромагнетик описывается моделью Вейса, в рамках которой нормированная намагниченность  $\eta = M/M_0$  связана с магнитным полем  $H$  соотношением

$$\text{th } \eta = \frac{T}{T_c} \eta - \frac{\mu_B H}{kT}.$$

Здесь  $T$  — температура,  $\mu_B$ ,  $k$ ,  $M_0$ ,  $T_c$  — постоянные коэффициенты, причем  $T_c$  представляет собой температуру в точке Кюри. Ферромагнетик плотно входит в соленоид, температура среды выше точки Кюри. Покажите, что при приближении температуры к точке Кюри и линейная модель, и модель слабой нелинейности оказываются несостоятельными. (*Указание.* Следует искать решение уравнения Вейса  $\eta = \eta(H)$  в виде соответствующего ряда по степеням  $H$ ).

**Задача 2.7.** Для модели ферромагнетика Вейса постройте графики зависимости намагниченности образца  $M$  от внешнего поля  $H$ . Покажите, что эти графики имеют качественно разный вид при температуре  $T$  большей и меньшей точки Кюри. Обсудите возможность мультистабильности и гистерезиса в системе. Свяжите Ваши рассуждения с известной Вам информацией о поведении ферромагнетиков.