ФЕДЕРАЛЬНАЯ ЦЕЛЕВАЯ ПРОГРАММА
«ГОСУДАРСТВЕННАЯ ПОДДЕРЖКА ИНТЕГРАЦИИ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ НАУКИ»

СОВРЕМЕННАЯ ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

А. П. КУЗНЕЦОВ
С. П. КУЗНЕЦОВ
Н. М. РЫСКИН

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

*Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по физическим специальностям*

ФМ

Москва
Физматлит, 2002

ББК 22.336/213
К 89
УДК 532.59

Издание осуществлено при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки»

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор *Б. П. Безручко*
доктор физико-математических наук *В. В. Попов*

КУЗНЕЦОВ А. П., КУЗНЕЦОВ С. П., РЫСКИН Н. М. Нелинейные колебания: Учеб. пособие для вузов.—М.: Издательство физико-математической литературы, 2002.—292 с. (Сер. Современная теория колебаний и волн).—ISBN 5-94052-058-8.

Книга представляет собой учебное пособие по нелинейной теории колебаний и является существенной составной частью цикла «Современная теория колебаний и волн». В отличие от традиционных курсов теории колебаний, книга ориентирована на студентов 2-го курса, что определило более популярный стиль изложения. Материал книги тщательно подобран так, чтобы служить достаточной базой для формирования «нелинейного мышления» у читателя, избегая в то же время громоздких выкладок и более специальных моментов. Книга состоит из четырех основных разделов: «Общие понятия нелинейной теории колебаний», «Нелинейный осциллятор», «Автоколебания», «Неавтономные системы». Существенным достоинством курса является наличие большого числа задач и упражнений, органически увязанных с основным изложением.

Для студентов и аспирантов физических и физико-технических специальностей вузов, а также для научных работников, интересующихся теорией колебаний и волн.

Учебное издание

КУЗНЕЦОВ Александр Петрович
КУЗНЕЦОВ Сергей Петрович
РЫСКИН Никита Михайлович

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Редактор *Л. А. Панюшкина*
Компьютерная графика *М. Н. Грицук*
Компьютерная верстка *Г. М. Красниковой*

ИД № 01389 от 30.03.2000
Подписано в печать 12.09.2002. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 18,25. Уч.-изд. л. 20,08. Тираж 1000 экз.

Издательство Физико-математической литературы
119071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Отпечатано с готовых диапозитивов
ГУП «Облиздат»
248640 Калуга, пл. Старый торг, 5
Заказ № 220

ISBN 5-94052-058-8

СОДЕРЖАНИЕ

Часть I

Общие понятия нелинейной теории колебаний

Лекция 1

О предмете теории колебаний

Говоря о *колебаниях*, мы имеем в виду движения, явления, процессы, обладающие свойством хотя бы приблизительной повторяемости во времени (рис. 1.1). Объект той или иной физической природы, в котором реализуется колебательный процесс, называют *колебательной системой*. О величинах, изменение которых во времени (*динамика*) составляет содержание колебательного процесса, говорят как о *динамических переменных*. Например, в механических системах динамические переменные — это чаще всего координаты и скорости частиц, в электрических — напряжения на определенных элементах схемы и протекающие через элементы токи, в химических — концентрации реагирующих компонентов и т.д. Обычно предполагается, что колебания совершаются в ограниченном интервале значений динамических переменных.

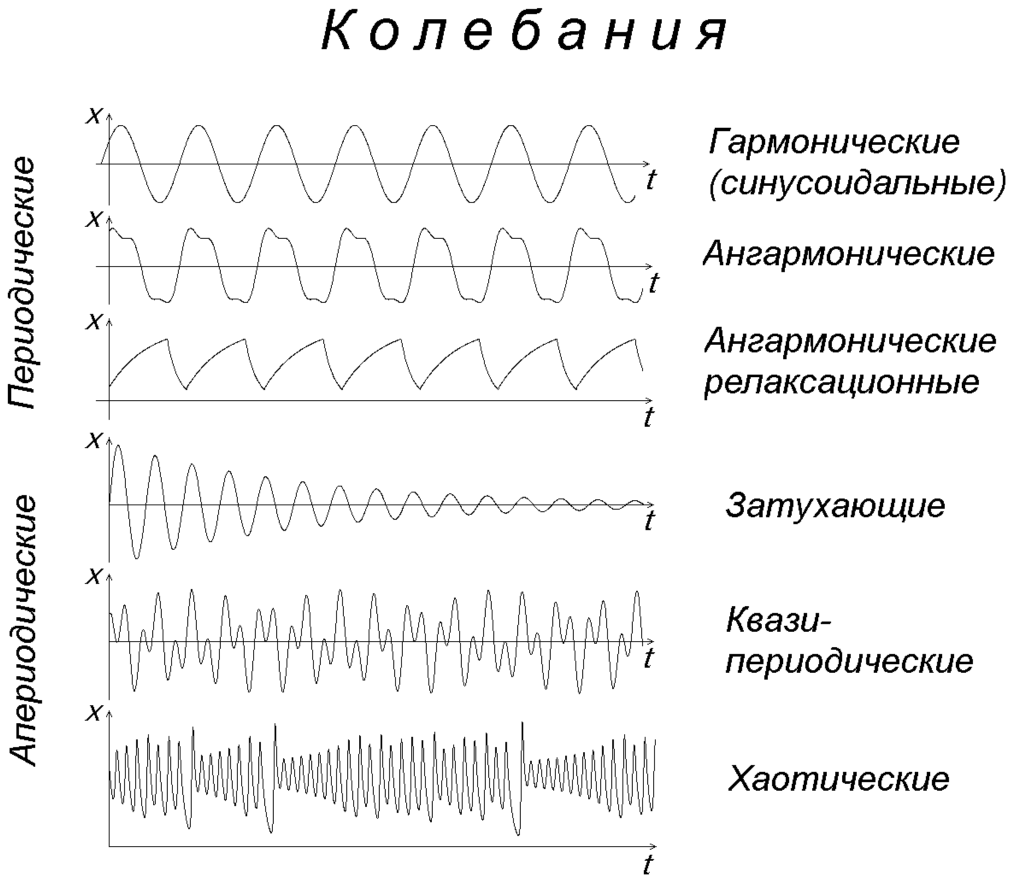

Рис.1.1. Вид зависимостей динамической переменной от времени в ходе различных по характеру колебательных процессов.

В самом простом случае, когда зависимость динамической переменной от времени задается функцией синуса или косинуса, говорят о *гармонических (синусоидальных) колебаниях*:

$$x = A\sin\left(\omega t + \varphi\right). \tag{1.1}$$

Здесь x – динамическая переменная, постоянная A характеризует интенсивность, “размах” колебаний и называется *амплитудой*, величина ω называется *частотой*, она связана с периодом колебаний T соотношением $\omega = 2\pi/T$. Величину φ называют *фазой* колебательного процесса.

Мы сознательно допускаем здесь некоторое ставшее почти общепринятым огрубление терминологии. Более аккуратно именовать ω *круговой частотой*, резервируя термин частота для величины, обратной периоду, и отличающейся от ω на множитель $\left(2\pi\right)^{-1}$: $\nu = 1/T = \omega/2\pi$. Единицы измерения герц (одно колебание в секунду), килогерц (10^3 колебаний в секунду), мегагерц (10^6 колебаний в секунду), гигагерц (10^9 колебаний в секунду) относятся именно к частоте ν, тогда как ω измеряется в сек$^{-1}$. Далее, термин “фаза” часто относят ко всему аргументу под знаком косинуса, $\left(\omega t + \varphi\right)$, а величину φ называют тогда *начальной фазой*. Обычно из контекста ясно, какая из версий терминологии имеется в виду, и недоразумения исключены.

На рис.1.2-1.4 приводятся некоторые примеры колебательных систем.

Как известно, большинство научных дисциплин выделяют свой предмет, отправляясь от физической природы исследуемого объекта (механика, электродинамика, оптика, физика твердого тела и др.). Фундаментальное отличие теории колебаний состоит в том, что ее предмет определяется совсем *по другому принципу*, а именно, *по наличию колебательной по своему характеру динамики безотносительно к физической сущности рассматриваемых явлений*. Среди задач теории колебаний можно назвать классификацию колебательных процессов, разработку математических моделей для их описания, выявление закономерностей, являющихся общими для систем различной физической природы.

Приведенное в начале лекции “определение” колебаний очень широкое и подразумевает дальнейшую конкретизацию и детализацию. Например, говорят о колебаниях затухающих и незатухающих, гармонических и негармонических (ангармонических), релаксационных, периодических, квазипериодических, хаотических и так далее (рис.1.1).

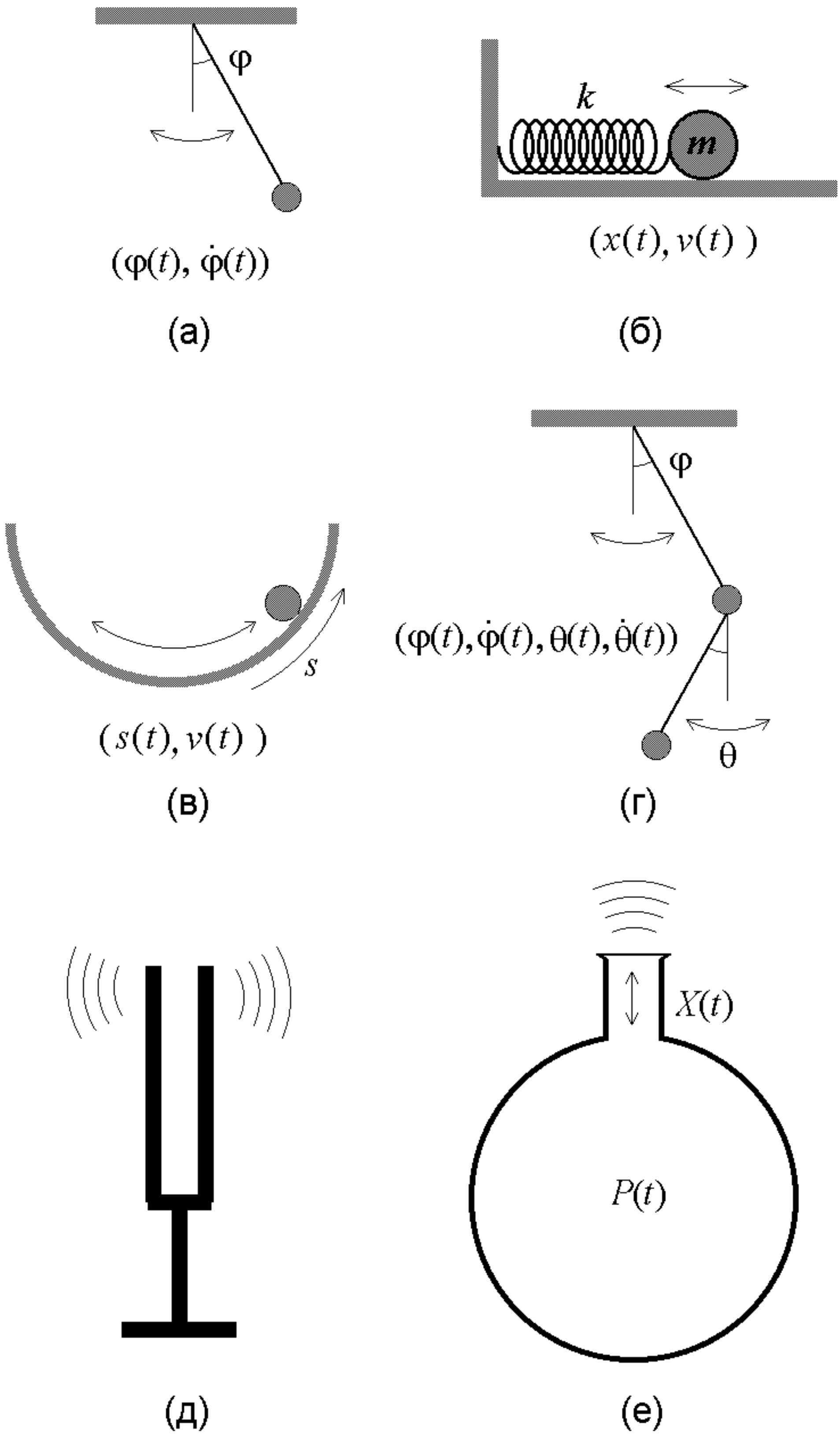

Рис.1.2. Примеры механических и акустических колебательных систем: а) маятник, б) пружинный маятник, в) шарик в лунке, г) двойной маятник, д) камертон, е) резонатор Гельмгольца.

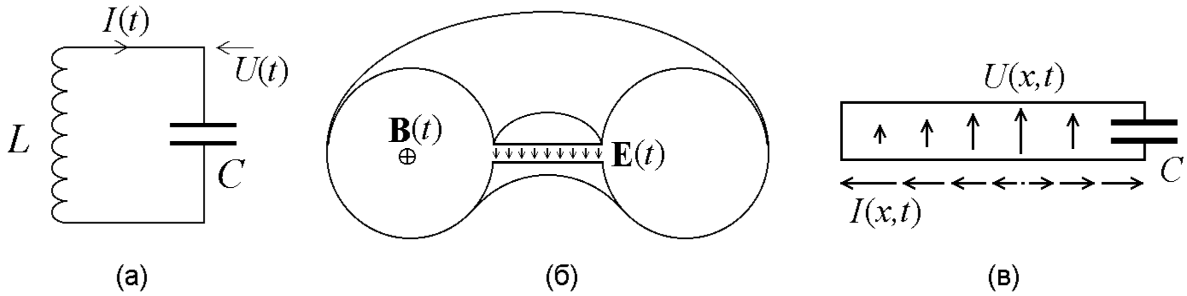

Рис.1.3. Примеры электрических (электромагнитных) колебательных систем: а) колебательный контур, б) тороидальный резонатор, в) отрезок длинной линии замкнутый с одного конца и нагруженный на емкость с другого.

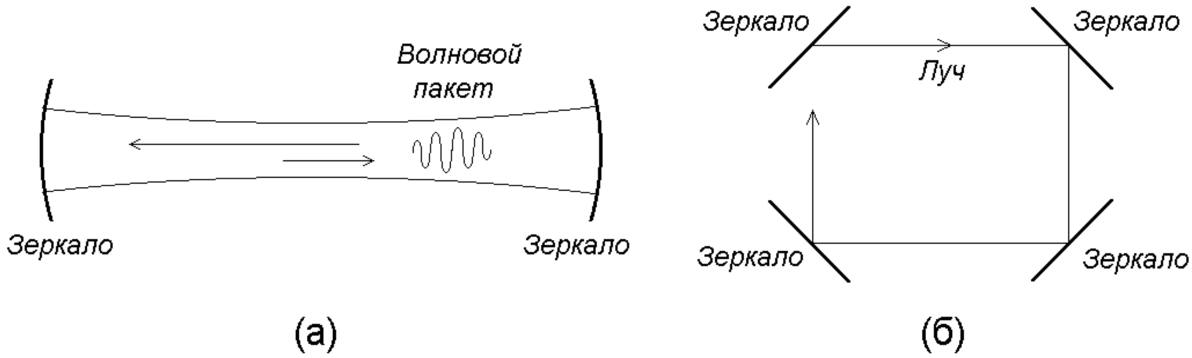

Рис.1.4. Примеры оптических колебательных систем: а) открытый резонатор, б) кольцевой резонатор.

Очень важный шаг в классификации колебательных явлений мы делаем, когда начинаем рассматривать *малые колебания* и *большие колебания*.

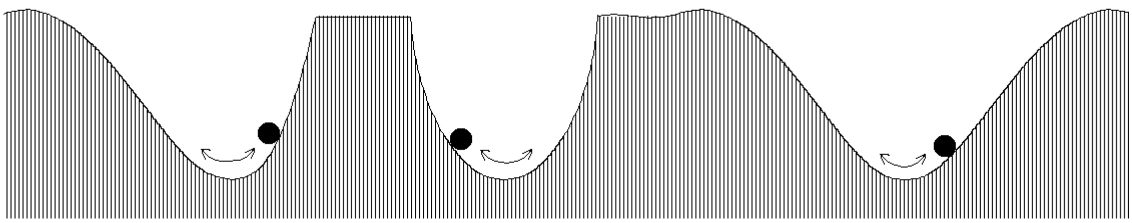

Рис.1.5. Три механические колебательные системы типа шарик в лунке, в которых малые колебания происходят практически одинаково, тогда как большие колебания существенно отличаются.

На рис.1.5 приводится пример – три простейшие механические колебательные системы типа шарик в лунке. Во всех этих трех случаях *малые* колебания протекают *одинаково* и описываются одной и той же математической моделью линейного осциллятора – уравнением

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0\,. \tag{1.2}$$

(В механике и теории колебаний точка над буквой по традиции, восходящей к Ньютону, обозначает производную по времени, две и три точки – соответственно, вторую и третью производную: $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$, $\dddot{x} = \dfrac{d^3x}{dt^3}$.) Параметр ω в уравнении (1.2) определяется формой лунки вблизи ее дна, а решением служит, как известно, функция вида (1.1). Что касается *больших* колебаний, то они будут происходить *по-разному*, в силу того, что шарикам в процессе движения придется посещать области, где форма лунок существенно различается. В рамках математической модели учет этого обстоятельства производится добавлением в уравнение (1.2) *нелинейных* членов таких как x^2, x^3, ... Применительно к нашему примеру можно сказать, что в ростом амплитуды в каждом случае “включается” своя нелинейность. Малые колебания составляют предмет *линейной*, а большие — *нелинейной* теории колебаний.

Приведенные рассуждения безусловно справедливы, пока мы говорим о колебаниях в гладких лунках, когда профиль вблизи дна представляется функцией с ненулевым коэффициентом разложения в ряд Тейлора перед квадратичным членом. Это ситуация в определенном смысле естественная, или, как говорят, *типичная*. Если по каким-то специфическим причинам коэффициент при квадратичном члене обращается в ноль, то возникает *атипичная* ситуация, когда даже малые колебания нельзя считать линейными (рис. 1.6а). С другой стороны, если отказаться от требования гладкости и рассмотреть колебания в таких ямках, как на рис. 1.6б,в, то мы тоже получим систему, в которой малые колебания не являются линейными. Поэтому утверждение о том, что малые колебания линейные, а большие – нелинейные, следует воспринимать с оговоркой, что это относится к гладкому случаю, и притом к типичной ситуации.

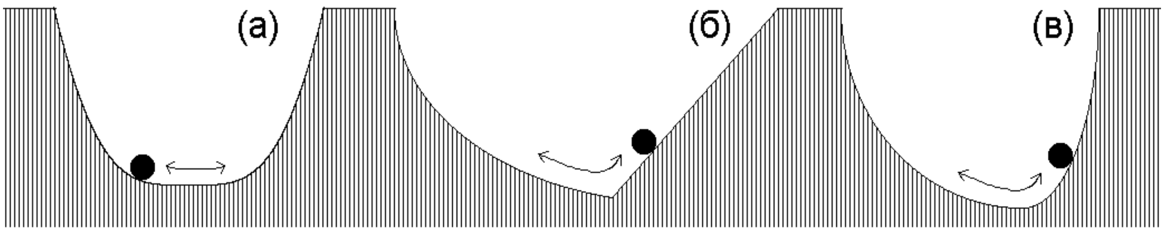

Рис.1.6. Примеры системы, для которых малые колебания не являются линейными: (а) профиль лунки имеет разложение в ряд, начиная с четвертой степени, (б) профиль со скачком первой производной в нижней точке, (в) профиль со скачком второй производной в нижней точке.

Установившееся терминологически разделение колебаний на линейные и нелинейные отражает тип математических моделей, используемых для их описания. Линейные уравнения, к классу которых относится, в частности, уравнение (1.2), содержат только первые степени динамических переменных и их производных. Они характеризуются следующим основным свойством: если функции $x_1(t)$ и $x_1(t)$ являются решениями, т.е. представляют два возможных в данной системе колебательных процесса, то каждая линейная комбинация вида $c_1x_1(t)+c_2x_2(t)$ также служит решением и определяет возможный в этой системе колебательный процесс (*принцип суперпозиции*). Коэффициенты c_1 и c_2 произвольны по величине. Соответственно, произвольной может быть и амплитуда колебаний в линейной системе.

Отсюда, между прочим, следует, что по-настоящему линейных систем в природе не бывает. Представим себе, например, что произойдет, если мы будем рассматривать последовательно колебательный процесс все большей и большей амплитуды в физически реальном колебательном контуре. Ясно, что при достаточно большой (пусть даже *очень* большой!) величине переменного напряжения неизбежно произойдет электрический пробой. Следовательно, колебания столь большой амплитуды будут происходить иначе, чем малой, и принцип суперпозиции нарушится.

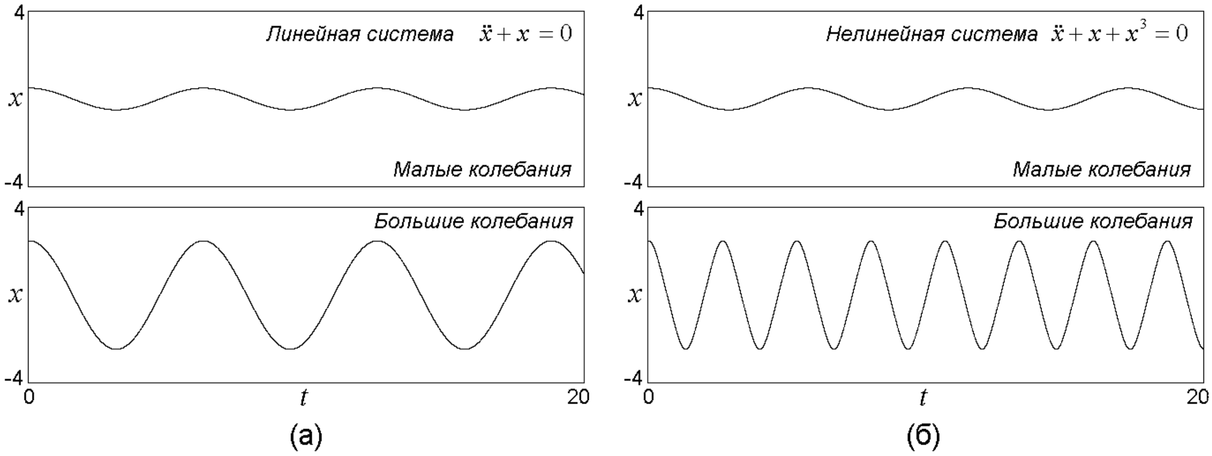

Рис.1.7. Колебания малой амплитуды (вверху) и большой (внизу) для двух колебательных систем – линейной (а) и нелинейной (б). Обратите внимание на то, что форма малых и больших колебаний в линейной системе одинакова и близка к форме малых колебаний в нелинейной системе. Большие колебания в нелинейной системе существенно отличаются периодом и формой.

Можно сказать, что в линейной системе среди определяющих величин нет параметра с размерностью амплитуды, т.е. отсутствует характерный масштаб амплитуды. Это значит, что колебания разной амплитуды должны происходить одинаковым образом: график зависимости динамических переменных от времени для колебаний большей и меньшей амплитуды выглядит одинаково, различаясь только масштабом по оси ординат (рис. 1.7а). Напротив, в нелинейной системе принцип суперпозиции не выполняется, а колебания будут протекать по-разному в зависимости от того, мала или велика их амплитуда (рис. 1.7б).

При рассмотрении колебательных систем наряду с динамическими переменными, зависимость которых от времени составляет сущность колебательного процесса, приходится иметь дело также с величинами иного рода — *параметрами*, которые входят в уравнения и считаются постоянными во времени, но от задания которых может зависеть характер реализующегося в системе режима.

Имея конкретную колебательную систему, обычно можно указать область параметров и динамических переменных, в которой колебания с достаточной степенью точности можно считать линейными, и область, где они существенно нелинейные. Например, для шарика в лунке (рис. 1.5), характерный масштаб амплитуды, отвечающий включению нелинейности, есть масштаб длины, на котором форма лунки становится заметно отличной от параболической. Подчеркнем, что речь идет здесь о характеристике, определенной грубо, по порядку величины.

Если для некоторой системы можно указать такой набор динамических переменных, по которому в принципе однозначно определяется этот же набор переменных в любой последующий момент времени, то ее называют *динамической системой*. Указанный набор величин задает в каждый момент времени *состояние*, или *вектор состояния*, системы. Об изменении состояния во времени говорят как о *динамике* системы. Динамику часто удобно представлять себе геометрически. Для этого вводят *пространство состояний*, или *фазовое пространство*, по осям координат которого отложены динамические переменные, задающие состояние. Размерность фазового пространства может быть разной для разных систем, например, для осциллятора (1.2) она равна 2 (состояние задается мгновенной координатой и скоростью). Динамика системы представляется движением изображающей точки в фазовом пространстве по некоторой траектории, называемой *фазовой траекторией*, или *орбитой*. Понятие динамической системы более формально, чем понятие колебательной системы, и больше подчеркивает математический, нежели физический аспект. Говоря о динамической системе, мы имеем в виду определенную теоретическую абстракцию, подразумевающую, в частности, принципиальную изолированность системы от неконтролируемых воздействий со стороны окружения. С другой стороны, колебательная система — это, скорее, объект реального физического мира, хотя его конкретная физическая природа может быть самой разной. В нашем курсе мы будем иметь дело только с такими колебательными системами, которые могут рассматриваться как динамические системы, так что различать эти два понятия не будем. В частности, мы будем говорить о фазовом пространстве, фазовых траекториях, состояниях колебательных систем, вкладывая в них именно то содержание, как это было сейчас объяснено.

Принято подразделять колебательные системы на *консервативные* и *диссипативные*.

Обратимся сначала к механическим колебаниям. Система будет консервативной, если колебательные процессы в ней протекают так, что полная механическая энергия (кинетическая плюс потенциальная), связанная с величинами, принятыми за динамические переменные, остается с течением времени постоянной. Системы, в которых имеются потери механической энергии из-за трения (т.е. переход энергии в тепло, или диссипация), называются диссипативными.

Если мы хотим выработать "общеколебательное" определение консервативных и диссипативных систем, то нам не следовало бы апеллировать к понятию механической энергии, пригодному лишь для конкретного класса систем определенной физической природы. Такое общее определение можно дать, но в нашем курсе мы удовлетворимся тем, что воспользуемся идеей "колебательной взаимопомощи" научных дисциплин по Л.И. Мандельштаму (см. ниже). Мы говорим, что *колебательная система произвольной природы считается консервативной, либо диссипативной, если ее динамика описывается такой математической моделью, которая соответствует в точности некоторой консервативной, либо диссипативной, механической системе*. Например, электрическая цепь, содержащая только реактивные элементы – емкости и индуктивности, представляет собой консервативную колебательную систему, а в присутствии сопротивлений (резисторов) становится диссипативной системой.

Для консервативных систем характерно неограниченно долгое сохранение «памяти» о начальном состоянии. Например, колебания осциллятора (1.2) сохраняют всегда ту же самую амплитуду, какая возникла при задании начального состояния системы. Другому начальному состоянию будет соответствовать другая, но тоже остающаяся неизменной, амплитуда.

Для диссипативных систем характерна «потеря памяти» о начальном состоянии. Режим динамики, возникающий в системе, предоставленной самой себе в течение длительного времени, становится не зависящим от начального состояния (по крайней мере, при вариации начальных условий в некоторых конечных пределах). Множество точек в фазовом пространстве диссипативной системы, посещаемых в установившемся режиме, называется *аттрактором*. Простые примеры аттракторов — устойчивое состояние равновесия и устойчивый предельный цикл — замкнутая фазовая траектория, на которую наматываются все близкие траектории.

С наличием в фазовом пространстве предельного цикла ассоциируется один из интересных и общих нелинейных колебательных феноменов — *автоколебания.* Это самопроизвольно возникающий в некоторых диссипативных системах колебательный процесс, характеристики которого — амплитуда, частота, форма колебаний определяются параметрами самой системы и не зависят от конкретных начальных условий (см. примеры на рис. 1.8). Автоколебания встречаются в радиотехнике (электронный автогенератор — основа любой радиопередающей системы), в акустике (свисток, духовые музыкальные инструменты), в аэродинамике (флаг, полощущийся на ветру, флаттер — нежелательные и опасные колебания крыла самолета). В астрофизике надежно установлена автоколебательная природа процесса, приводящего к периодическому изменению светимости определенного класса звезд — цефеид. Автоколебания принципиально не могут быть объяснены в рамках линейной теории, поскольку в ней, как мы указывали, отсутствует характерный масштаб амплитуды, а он непременно должен фигурировать как атрибут возникшего и самоподдерживающегося автоколебательного процесса.

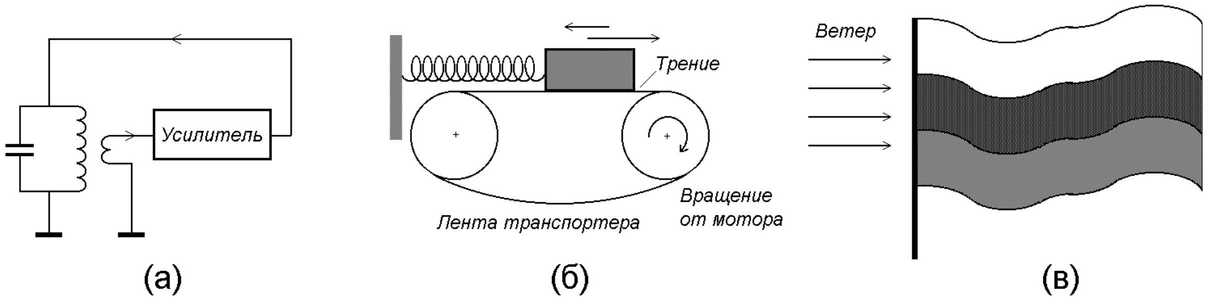

Рис. 1.8. Примеры автоколебательных систем: а) радиотехнический автогенератор, б) механическая система, в) флаг, полощущийся на ветру.

То обстоятельство, что линейные колебания в системах разной природы могут рассматриваться с единой точки зрения, к началу XX века было ясно уже многим исследователям. Можно сказать, что оформилась, как самостоятельная дисциплина, *линейная теория колебаний*. Один из признанных классиков этой науки — английский физик лорд Джон Уильям Рэлей (1842–1919).

Впервые с проблемами, которые можно отнести к ведению нелинейной теории колебаний, столкнулись ученые, занимавшиеся небесной механикой. Как известно, фундаментальная задача двух тел, движущихся в поле тяготения друг друга, приводит (в случае ограниченного движения) к строго периодическим колебаниям — обращению по эллиптическим орбитам около общего центра масс. С другой стороны, уже в задаче трех тел исследователь сталкивается с возможностью очень сложной динамики, и, как теперь известно, может возникать хаотическое поведение. Надо заметить, однако, что задачи небесной механики в подавляющем большинстве случаев затрагивают только консервативные системы, и притом вполне определенного типа.

Настоятельная потребность в подробном изучении нелинейных колебаний, в том числе в диссипативных системах, стала ощущаться в первой половине XX века с развитием радиотехники, а также аэро- и гидродинамики. Позднее “зоопарк” нелинейных систем стал пополняться возрастающими темпами, охватывая квантовую электронику, химическую кинетику, астрофизику, биологию и другие области знания.

На раннем этапе теории колебаний казалось, что нелинейные системы слишком разнообразны, чтобы допускать анализ с каких-то единых позиций, и что каждая конкретная система должна поэтому рассматриваться отдельно, сама по себе. Идея о том, что возможно построение общей теории нелинейных колебаний была неочевидной и, в каком-то плане, революционной.

Возникновение, развитие и становление нелинейной теории колебаний во многом связано с именем советского физика Леонида Исааковича Мандельштама (1879–1944) и с деятельностью ведущей свое начало от него научной школы. Многие принципы, выдвинутые Л.И. Мандельштамом, настолько органично и естественно вошли в плоть и кровь теории колебаний, что об их происхождении обычно никто и не задумывается. Краткий и ясный обзор этих идей был представлен в выступлении другого основоположника теории колебаний, ученика Л.И. Мандельштама, Александра Александровича Андронова (1901–1952) на заседании АН СССР 22 декабря 1944 г. “Л.И. Мандельштам и теория нелинейных колебаний”. В более развернутом виде читатель может ознакомиться с этими методологическими идеями, обратившись к книге Мандельштама “Лекции по теории колебаний” и книге Андронова, Витта и Хайкина “Теория колебаний”.

В основе выдвинутой Л.И. Мандельштамом научной программы лежала идея выработки *нелинейного мышления* — совокупности концепций, представлений, моделей, методов, наглядных образов, которые составляли бы содержание единого подхода к исследованию нелинейных колебаний в системах различной природы.

Согласно Мандельштаму, теорию колебаний можно рассматривать как своего рода *“интернациональный язык”*, который будет понятен и полезен представителям различных конкретных наук, будь то механика, электромагнетизм, радио- и электротехника, оптика, или (добавим мы) химия, биология, экономика. Сама возможность такого “языка” опирается на присущую различным областям знания *“колебательную общность”*. Наличие общего “языка” не отменяет “национальных языков”, выработанных каждой отдельной дисциплиной, но открывает замечательные перспективы для их взаимного обогащения путем обмена представлениями, сформированными в конкретных областях. При этом возникает возможность *“колебательной взаимопомощи”* различных дисциплин. Например, идеи модуляции и детектирования колебаний, которые была хорошо разработаны, поняты и нашли практическое применение в радиотехнике, оказались впоследствии плодотворными в оптике (в особенности после появления эффективных источников когерентного излучения – лазеров).

Обнаруживая те или иные колебательные закономерности в системах различной природы и представляя их в терминах “интернационального языка”, мы не просто выявляем свойства исследуемых систем, но и обогащаем конкретным содержанием теорию колебаний.

Теория колебаний выступает, таким образом, как *синтетическая научная дисциплина*. Формируя свое содержание, она привлекает материал из разных областей знания, и в то же время находит выход и приложения в этих разных областях. В каком-то смысле аналогичную природу имеет математика. Но математика, по-видимому, в гораздо большей степени подчиняется своей собственной внутренней логике развития, т.е. нацелена больше на построение своего “мира”, нежели на обслуживание приложений и формирование контактов с естественнонаучным “окружением”. Л.И. Мандельштам рассматривал теорию колебаний как *физическую дисциплину*, отличную от математики в том смысле, что необходимая для изучения колебаний интуиция исследователя базируется не только и не столько на формально-математических моделях, сколько на физическом понимании сходных по своей колебательной природе явлений и процессов в механике, радиотехнике, оптике и т.д. Если для прикладной математики основной задачей служит исследование уже построенной математической модели явления, то для теории колебаний конструирование модели колебательной системы, основанное на *правильной идеализации* реального процесса — одна из первостепенных задач. Как подчеркивали Мандельштам и Андронов, выбор такой идеализации очень часто далеко не тривиален и требует глубокого понимания физической сущности происходящих явлений.

Во второй половине XX века теория колебаний бурно развивалась и приобрела, по существу, новое лицо.

Во-первых, в силу потребностей конкретных научных дисциплин, таких как квантовая электроника, физика плазмы, физика твердого тела, астрофизика, физика атмосферы и океана, химическая кинетика, биофизика, экономика, чрезвычайно разрослась база применения идей теории колебаний, она обогатилась примерами колебательных систем, расширилась феноменология колебательных процессов.

Во-вторых, произошли революционные изменения, которые затронули собственно содержание и методический инструментарий теории нелинейных колебаний и связаны с появлением и широким распространением компьютеров. Те задачи, которые ранее требовали утонченного и кропотливого исследования или же оставались вовсе недоступными, теперь оказалось возможным анализировать с привлечением методов численного моделирования с наглядным и быстрым представлением результатов посредством компьютерной графики. Все это ведет, в частности, к необходимости переосмысления содержательной части учебного курса теории колебаний. Какие-то из разработанных ранее приемов аналитического и графического исследования можно признать устаревшими и ненужными (по крайней мере, при начальном знакомстве с предметом). Другие должны быть отнесены в “золотой фонд” и рассматриваться как существенная составная часть “нелинейного мышления”, без которого самый полный набор компьютерные результатов может превратиться в бесформенную свалку неосмысленного материала.

В-третьих, на новом этапе развития теории колебаний центр интереса сместился от систем с минимальным количеством существенных динамических переменных (маломерных) к системам с большим их количеством (многомерным). Обнаруживается, что начиная с размерности фазового пространства, равной трем, становятся возможными весьма разнообразные и нетривиальные типы колебательных процессов. В частности, могут наблюдаться хаотические колебания или *динамический хаос*. Такой колебательный режим характеризуется сложной, нерегулярной зависимостью динамических переменных от времени, и при этом обладает высокой чувствительностью к малым возмущениям начальных условий. При наличии малой погрешности в начальных данных точные значения динамических переменных становятся непредсказуемыми уже на конечном временном интервале. (Это заставляет принципиально по-новому посмотреть на многие традиционно стоящие перед наукой проблемы, например, долгосрочный прогноз погоды!) Анализ динамического хаоса и других режимов сложной динамики потребовал привлечения широкого арсенала методов, который включает новые математические идеи.

На новом этапе развития науки, помимо теории колебаний, как таковой, стали формироваться другие синтетические научные дисциплины, связь которых с теорией колебаний уместно здесь кратко обсудить.

Теория колебаний и нелинейная динамика

Словосочетание *нелинейная динамика* стало очень распространенным в мировом научном сообществе в последние годы. Если не вдаваться в тонкие детали, то нелинейная динамика – это по существу то же самое, что мы понимаем под теорией нелинейных колебаний. И все же употребление одного или другого термина несет определенный акцент. Во-первых, под нелинейной динамикой мы имеем в виду дисциплину более математического характера, нежели теория колебаний. Основное содержание нелинейной динамики — исследование *математических моделей* различных систем. В основу кладется понятие динамической системы – теоретическая абстракция, подразумевающая, как мы говорили, принципиальную изолированность системы от остального мира. Теория колебаний представляет собой в каком-то смысле более широкую, более нацеленную на использование физической интуиции, систему воззрений. Во-вторых, говоря о нелинейной динамике, мы тем самым указываем на некоторое смещение внимания к более современным аспектам сложного динамического поведения, ставшим доступными для анализа в эпоху компьютеров (например, динамический хаос).

Теория волн и динамика распределенных систем

Расширяя предмет исследования по сравнению с традиционной теорией колебаний, можно включить в рассмотрение наряду с временными еще и пространственные зависимости динамических переменных. В этом случае говорят о *распределенных системах* (в отличие от сосредоточенных, или конечномерных колебательных систем).

Характерный пример распределенных систем доставляют задачи гидро- и газодинамики, когда мгновенное состояние системы задается непрерывным распределением величин (скорости, плотности) в некоторой области пространства. Сводить динамику такого рода систем к колебаниям ограниченного числа переменных допустимо лишь в специальных случаях и в определенном, иногда только очень грубом, приближении. Распространяющийся в пространственно распределенной среде колебательный процесс есть не что иное, как волна (вспомните волны на поверхности воды, разбегающиеся от места падения брошенного камушка). Поэтому, обращаясь к рассмотрению колебаний в распределенных системах, мы приходим к *теории волн*.

Переход к анализу распределенных систем сопровождается радикальным усложнением задач, с которыми приходится иметь дело. Однако вся методологическая основа теории колебаний, подразумевающая разработку единых подходов к системам разной физической природы, остается в силе.

Одна из фундаментальных проблем, имеющая огромное теоретическое и прикладное значение, состоит в том, чтобы объяснить природу *турбулентности* — сложной хаотической пространственно-временной динамики течения жидкости или газа, возникающей при очень общих условиях, если скорость потока достаточно велика. Это часть более общей проблемы объяснения и описания пространственно-временного хаоса в распределенных системах различной природы.

Обобщение представлений об автоколебаниях на распределенные системы привело к концепции *автоволн* — самоподдерживающихся колебательно-волновых процессов, характеристики которых в значительной мере не зависят от начальных или граничных условий. Теория автоволн интенсивно развивалась, в частности, в связи с приложениями в химии и биологии. Благодаря широкому использованию компьютерного моделирования, а также привлечению новых математических идей и методов, в понимании колебательно-волновой динамики распределенных систем достигнуты значительные успехи.

Синергетика, теория диссипативных структур

В 70-х гг. XX века немецкий ученый, специалист в области лазерной физики, Герман Хакен усмотрел аналогию между процессами возникновения генерации в лазере и формированием структур в системах иной природы. Он провозгласил, что это может служить основой новой синтетической научной дисциплины — *синергетики*. Синергетика оказалась своего рода знаменем, под которое стали собираться, обнаружив общность интересов, представители различных наук, от физики и химии до экономики и социологии. Пожалуй, предмет синергетики во многом совпадает с предметом теории колебаний и волн, но ее специфика состоит в особом внимании к феномену *самоорганизации*. Речь идет о процессах, заключающихся в самопроизвольном формировании и усложнении упорядоченных структур, что может происходить во многих пространственно протяженных системах, средах. Такую среду, можно мыслить как совокупность большого числа точечных элементов, каждый из которых определенным образом взаимодействует со своими соседями в пространстве. Проблема того, каким образом динамика индивидуальных элементов и характер связи между ними проявляется в свойствах среды, ее способности к образованию пространственных структур, – одна из центральных задач синергетики. (Термин *синергетика* и возник от греческого слова, означающего совместное, согласованное действие.) Подобно теории колебаний, краеугольный камень синергетики — единство феноменов, концепций, моделей применительно к системам самой разной физической природы. В гидродинамике примером самоорганизации может служить образование структуры в виде шестигранных ячеек при конвекции Рэлея — Бенара в слое жидкости, подогреваемой снизу; в химии и биологии — формирование так называемых структур Тьюринга, условием возникновения которых оказывается различие коэффициентов диффузии для участвующих в реакции компонентов; в космологии – возникновение спиральных галактик; в экологии – организация сообществ и т.д. Альтернативное обозначение по существу для той же дисциплины – *теория диссипативных структур* принадлежит Илье Романовичу Пригожину, главе Брюссельской научной школы физико-химиков, лауреату Нобелевской премии 1977 г.

Задача 1.1. Осуществите поиск в сети Интернет, используя приведенные в этой лекции ключевые термины теории колебаний.